УДК 373.5:51
ББК 22.1я721
К60

Макет подготовлен при содействии ООО «Айдиономикс»

Колесникова, Татьяна Александровна.

К60 Математика / Т. А. Колесникова. — Москва : Эксмо, 2023. — 320 с. — (Большой наглядный справочник школьника).

ISBN 978-5-04-159879-2

В справочнике представлены основные разделы школьного курса математики: «Алгебра», «Геометрия», «Элементы комбинаторики, теории вероятностей и статистики». Материал сгруппирован по коротким рубрикам, таблицам и схемам. В книге множество иллюстраций, важная информация подаётся через вопросно-ответную форму с элементами комиксов, что способствует её лучшему усвоению. Приводятся задания с ответами и подробными решениями.

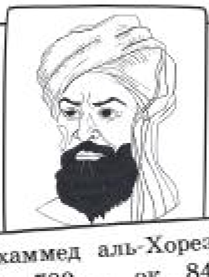
Книга будет полезна ученикам средней и старшей школы при подготовке к урокам, ОГЭ, ЕГЭ и другим формам контроля, а учителям поможет составить план занятий.

УДК 373.5:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-04-159879-2

СОДЕРЖАНИЕ

Большой вклад в развитие теории решения уравнений внёс Мухаммед аль-Хорезми — персидский учёный (математик, астроном, географ, историк). Он заложил основы алгебры как самостоятельной науки об общих методах решения числовых линейных и квадратных уравнений.

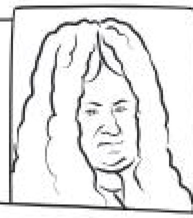


Мухаммед аль-Хорезми (ок. 780 — ок. 846)

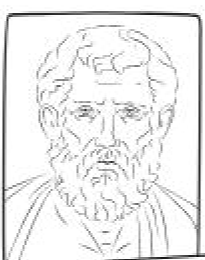
Томас Гарриот (1560—1621)

Знаки неравенства в их современном виде придумал английский математик Т. Гарриот. Знаки «<» и «>» являлись повёрнутыми на 90° буквами V. Книга с такими обозначениями вышла после смерти автора, в 1631 г.

Слово «функция» (от лат. *function* — «совершение», «выполнение») впервые было использовано немецким математиком Г. В. Лейбницем в XVII в.



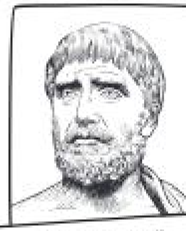
Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716)



Герон Александрийский (I в. н. э.)

Герон Александрийский — греческий математик и механик. В его честь названа формула для вычисления площади треугольника по сторонам, хотя она была известна ещё Архимеду. Герон интересовался треугольниками с целочисленными сторонами, площади которых тоже являются целыми, такие треугольники носят название героновых. Простейшим героновым треугольником является египетский треугольник.

Фалес — древнегреческий философ и математик из Милета, его именем названа теорема о параллельных секущих.



Фалес Милетский
(ок. 625 — ок. 545 г. до н. э.)

Христиан Гюйгенс
(1629—1695)

Пьер Ферма
(1607—1665)

Блез Паскаль
(1623—1662)

Якоб Бернулли
(1654—1705)

Зарождение теории вероятностей относится к середине XVII в. и связано с именами Х. Гюйгенса, Б. Паскаля, П. Ферма и Я. Бернулли, которые исследовали закономерности, присущие азартным играм.

ВВЕДЕНИЕ

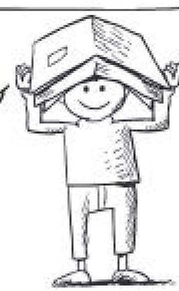
Перед вами справочник, который поможет обобщить, систематизировать и закрепить знания по математике за курс средней школы. В книге рассмотрены следующие разделы математики: «Алгебра», «Уравнения и неравенства», «Функции», «Начала математического анализа», «Геометрия», «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей».

Весь теоретический материал систематизирован и сопровождается наглядными схемами и таблицами, поясняющими рисунками, примерами решения задач. Это обеспечит максимальную сконцентрированность внимания, эффективное повторение и качественную подготовку по предмету.

На страницах книги читателя встретят персонажи из современности и из истории развития математической науки: взрослые и дети, учёные и преподаватели, которые зададут актуальные вопросы, дадут интересные и полезные содержательные ответы и пояснения. Диалоги персонажей помогут проанализировать научные факты и проблемы, связанные с выполнением отдельных заданий, сделают процесс усвоения материала более насыщенным и продуктивным.

Пособие поможет учащимся и выпускникам при подготовке к школьным занятиям, различным формам текущего и промежуточного контроля, а также к сдаче государственной итоговой аттестации.

Книга будет полезна школьникам, студентам и учителям, а также всем, кто интересуется математикой.



Желаем успехов!

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

Числовыми называются множества, элементами которых являются числа.

Множество натуральных чисел образуют числа, которые используются при счёте предметов.

$$N = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\ldots\}$$

Натуральные числа (1; 2; 3; 4; 5...), числа, им противоположные (–1; –2; –3; –4; –5...), и число нуль образуют множество целых чисел.

$$Z = \{\ldots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\ldots\}$$

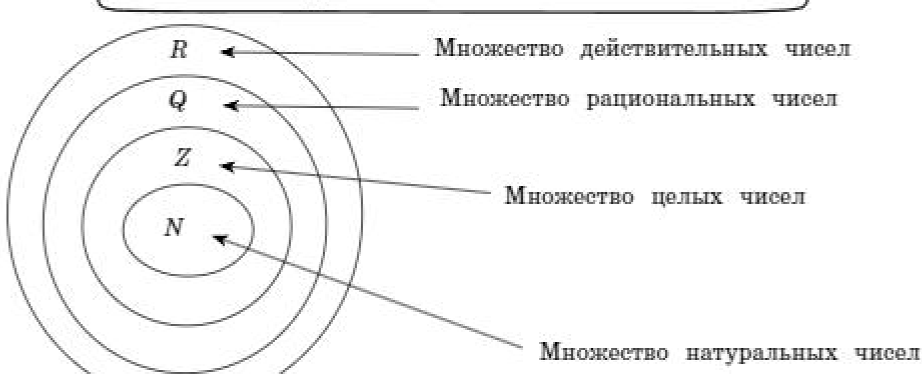
Множество рациональных чисел составляют числа, которые можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$ (конечные или бесконечные периодические десятичные дроби). Обозначение: Q.

Множество иррациональных чисел составляют числа, которые не могут быть представлены в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$ (бесконечные десятичные непериодические дроби). Обозначение: I.

Рациональные и иррациональные числа составляют множество действительных чисел. Обозначение: R.

$$R = Q \cup I$$

СВЯЗЬ МЕЖДУ ЧИСЛОВЫМИ МНОЖЕСТВАМИ



Немецкий математик XIX в. Л. Кронекер, желая подчеркнуть естественные причины появления множества натуральных чисел, сказал: «Бог создал натуральные числа, всё остальное — дело рук человека».

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Множество натуральных чисел является бесконечным, т. к. для любого натурального числа n найдётся натуральное число больше, чем n.

ДЕЙСТВИЯ С НАТУРАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

СЛОЖЕНИЕ

$a+b=c$

слагаемые сумма

$$a+b=b+a$$
$$a+(b+c)=(a+b)+c$$
$$a+0=a$$

ВЫЧИТАНИЕ (ДЕЙСТВИЕ, ОБРАТНОЕ СЛОЖЕНИЮ)

$a-b=c$

уменьшаемое разность

вычитаемое

$$a-(b+c)=(a-b)-c=(a-c)-b$$
$$(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c)$$
$$a-(b-c)=(a-b)+c$$
$$a-0=a$$
$$a-a=0$$

УМНОЖЕНИЕ

$$a\cdot b=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{b\ \text{слагаемых}}$$

$a\cdot b=c$

множители

произведение

Вариант обозначения: $a\times b$.

$$a\cdot b=b\cdot a$$
$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$
$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$$
$$(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c$$
$$a\cdot 1=a$$
$$a\cdot 0=0$$

ДЕЛЕНИЕ (ДЕЙСТВИЕ, ОБРАТНОЕ УМНОЖЕНИЮ)

$$a : b = c$$

делимое — a, делитель — b, частное — c

$(a:b):c = a:(b\cdot c)$

$a:(b:c) = (a:b)\cdot c$

$(a\cdot b):c = (a:c)\cdot b$

$(a\cdot b):c = a\cdot(b:c)$

$a:a = 1$

$a:1 = a$

$0:a = 0\ (a \neq 0)$

Варианты обозначения: $\dfrac{a}{b}$ или a/b.

★ Если частное c является натуральным числом, то говорят, что a делится (без остатка) на b.

★ Если частное c не является натуральным числом, то говорят, что a не делится (без остатка) на b.

Разделить с остатком число a на число b — значит найти два таких числа q и r, что $a = b\cdot q + r$ и $r < b$.

ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

$$\begin{array}{r|l} 70 & 3 \\ \underline{-6} & 23 \\ 10 & \\ \underline{-9} & \\ 1 & \end{array}$$

делимое — 70, делитель — 3, неполное частное — 23, остаток — 1

Проверка: $70 = 3\cdot 23 + 1$.

ВАЖНО! Остаток должен быть меньше делителя.

ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Выражение a^n называется **степенью числа a.**

Вторая степень числа называется **квадратом** числа, третья степень — **кубом** числа.

показатель степени

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ множителей}}$$

основание степени

СВОЙСТВА СТЕПЕНЕЙ

$a^1 = a$

$a^x\cdot a^y = a^{x+y}$

$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, где $a \neq 0$

$\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

$a^x\cdot b^x = (ab)^x$

$\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$, где $b \neq 0$

ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ

Десятки	Единицы									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ТАБЛИЦА СТЕПЕНЕЙ

a^n	Значения n									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19 683	59 049
4^n	4	16	64	256	1024	4096				
5^n	5	25	125	625	3125	15 625				
6^n	6	36	216	1296	7776	46 656				
7^n	7	49	343	2401	16 807					
8^n	8	64	512	4096	32 768					
9^n	9	81	729	6561	59 049					

Для чего в математике было придумано новое действие — возведение в степень? Ведь можно было обойтись умножением.

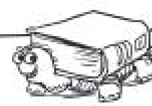
Множителей может быть очень много. Например, 5^{20} — это произведение 20 множителей, каждый из которых равен 5. Современным людям знание степени позволяет сэкономить время, а в древности оно помогало уменьшать ещё и финансовые затраты на записи, поскольку пергамен и папирус в Древней Греции стоили очень дорого.

Сложение и вычитание, умножение и деление, а также возведение в степень и извлечение корня попарно представляют собой обратные действия.

Свойства сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень представляют собой равенства, которые можно использовать не только слева направо, но и справа налево.

Действия сложения, вычитания, умножения и деления называют **арифметическими действиями.**

Только в результате сложения и умножения натуральных чисел получаются тоже натуральные числа.



ПОРЯДОК ДЕЙСТВИЙ

- Действия 1-й ступени: сложение и вычитание.
- Действия 2-й ступени: умножение и деление.
- Действия 3-й ступени: возведение в степень.

ВЫРАЖЕНИЯ БЕЗ СКОБОК

В выражении без скобок сначала выполняют действия большей ступени. Если выражение содержит действия одной ступени, то их выполняют в порядке, в котором они записаны, — слева направо.

Возведение в степень

умножение/деление

сложение/вычитание

✓ Запись решения в строчку:

$$\boxed{\overset{4}{17-}\overset{1}{5\cdot}\overset{2}{6:}\overset{5}{3-}\overset{6}{2+}\overset{3}{4:}2} =$$

$$=17-30:3-2+2=$$

$$=17-10-2+2=7-2+2=7.$$

ВЫРАЖЕНИЯ СО СКОБКАМИ

В выражении со скобками сначала выполняют все действия в скобках, а затем действия большей ступени. Скобками пользуются, чтобы изменить порядок действий.

Действия в скобках
↓
возведение в степень
↓
умножение/деление
↓
сложение/вычитание

✓ Запись решения по действиям:

$$\boxed{\overset{①}{(3+1)}\overset{③}{\cdot}2\overset{⑤}{+}\overset{②}{6^2}\overset{④}{:}3\overset{⑥}{-}7}=13$$

1) $3+1=4$;
2) $6^2=36$;
3) $4\cdot 2=8$;
4) $36:3=12$;
5) $8+12=20$;
6) $20-7=13$.

ДРОБИ

Дробь — форма представления числа в математике. Существует два вида дробей: обыкновенные и десятичные.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

Число вида $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$, называют **обыкновенной дробью.**

m ← числитель
n ← знаменатель

На древних вавилонских глиняных табличках и египетских папирусах встречаются не только натуральные числа, но и дроби. Этим источникам около 5000 лет. Первоначально применялись в основном обыкновенные дроби, они выражали результат измерения длины, площади и массы в тех случаях, когда выбранная единица измерения не укладывалась в целое число повторений.

Правильная дробь — это обыкновенная дробь, числитель которой меньше знаменателя, т. е. $m<n$.
Любая правильная дробь меньше единицы: $\frac{m}{n}<1$, если $m<n$.

✓ Правильные дроби: $\frac{3}{8}$ $(3<8)$; $\frac{1}{5}$ $(1<5)$.

Неправильная дробь — это обыкновенная дробь, числитель которой больше знаменателя или равен ему, т. е. $m \geq n$. Любая неправильная дробь больше единицы или равна ей:

$$\frac{m}{n} \geq 1, \text{ если } m \geq n.$$

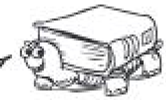
✓ Неправильные дроби:

$$\frac{8}{3}\,(8>3);\quad \frac{5}{5}\,(5=5).$$

✓ Представление натурального числа в виде неправильной дроби:

$$4=\frac{4}{1} \text{ или } 4=\frac{8}{2}.$$

Любое натуральное число можно представить в виде неправильной дроби.



ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ДРОБИ

Если числитель и знаменатель дроби умножить (разделить) на одно и то же число, отличное от нуля, то получится дробь, равная данной.

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c};\ \frac{a}{b}=\frac{a:c}{b:c},\ c\neq 0$$

ВАЖНО! При использовании основного свойства изменяется только внешний вид дроби, её значение при этом остаётся неизменным.

Сокращение дроби — действие перехода к новой дроби, равной заданной, но с меньшими числителем и знаменателем.

Сократить дробь — значит разделить числитель и знаменатель на их общий делитель, больший 1.

Несократимой называется дробь, числитель и знаменатель которой — взаимно простые числа.

Сокращать дробь можно сразу на наибольший общий делитель числителя и знаменателя либо несколько раз на общий делитель.

Приведение дроби к новому знаменателю — действие замены заданной дроби равной ей дробью, но с бо́льшими числителем и знаменателем.

✓ $\frac{18}{26}=\frac{9}{13}$ (числитель и знаменатель дроби разделили на 2).

Сократим дробь $\frac{140}{175}$.

✓ $140=2\cdot2\cdot5\cdot7$; $175=5\cdot5\cdot7$; НОД$(140;175)=5\cdot7=35$.

Тогда $\frac{140}{175}=\frac{140:35}{175:35}=\frac{4}{5}$.

✓ $\frac{140}{175}=\frac{140:5}{175:5}=\frac{28:7}{35:7}=\frac{4}{5}$.

Приведение к новому знаменателю используется при сложении, вычитании, сравнении обыкновенных дробей, а также при представлении обыкновенной дроби в виде десятичной.

✓ $\frac{1}{4}=\frac{25}{100}$ (числитель и знаменатель дроби умножили на 25).

СМЕШАННЫЕ ЧИСЛА

Число, содержащее целую и дробную части, называется **смешанным.**

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕПРАВИЛЬНОЙ ДРОБИ В ВИДЕ СМЕШАННОГО ЧИСЛА

Разделить числитель на знаменатель с остатком.

Неполное частное — это целая часть, остаток от деления — числитель, знаменатель остаётся прежним.

✓ $\frac{17}{7}=2\frac{3}{7}$, т. к. $17:7=2$ (ост. 3).

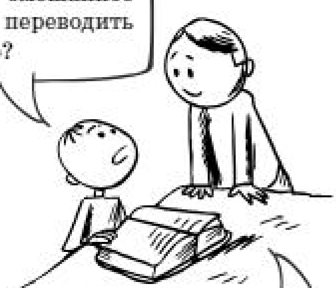
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СМЕШАННОГО ЧИСЛА В ВИДЕ НЕПРАВИЛЬНОЙ ДРОБИ

Умножить целую часть на знаменатель, прибавить числитель — получим числитель неправильной дроби.

Знаменатель остаётся прежним.

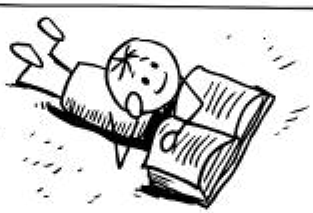
✓ $3\frac{5}{11}=\frac{3\cdot 11+5}{11}=\frac{38}{11}$.

Для чего нужно уметь представлять смешанное число в виде неправильной дроби и переводить неправильную дробь в смешанное число?



Смешанное число — это сумма натурального числа и обыкновенной дроби, записанная без знака «+».

✓ $8\frac{1}{3}=8+\frac{1}{3}$.



При сравнении, сложении и вычитании гораздо удобнее работать со смешанными числами. А умножение, деление и возведение в степень выполняются с неправильными дробями.

СРАВНЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ И СМЕШАННЫХ ЧИСЕЛ

СРАВНЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ

★ Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та дробь, у которой числитель больше.

✓ $\frac{5}{12} > \frac{3}{12}$, т. к. $5 > 3$.

★ Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та дробь, у которой знаменатель меньше.

✓ $\frac{5}{9} > \frac{5}{11}$, т. к. $9 < 11$.

СРАВНЕНИЕ СМЕШАННЫХ ЧИСЕЛ

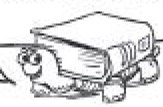
★ Из двух смешанных чисел с разными целыми частями больше то число, у которого целая часть больше.

✓ $7\frac{3}{8} > 6\frac{9}{13}$, т. к. $7 > 6$.

★ Если целые части смешанных чисел равны, надо сравнить их дробные части по правилам сравнения обыкновенных дробей.

✓ $2\frac{3}{20} > 2\frac{1}{20}$, т. к. $\frac{3}{20} > \frac{1}{20}$.

Если у дробей разные знаменатели (числители), необходимо сначала с помощью основного свойства дроби привести их к одному знаменателю (числителю).



АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ С ОБЫКНОВЕННЫМИ ДРОБЯМИ И СМЕШАННЫМИ ЧИСЛАМИ

СЛОЖЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ

Привести дроби к общему знаменателю, если знаменатели разные.

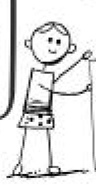
Сложить числители полученных дробей, знаменатель оставить прежним: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.

Если получилась сократимая дробь, её надо сократить; если дробь неправильная — представить её в виде смешанного числа.

✓ $\frac{3}{10} + \frac{7}{15} = \frac{9}{30} + \frac{14}{30} = \frac{23}{30}$.

✓ $\frac{2}{7} + \frac{3}{14} = \frac{4}{14} + \frac{3}{14} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$.

✓ $\frac{11}{15} + \frac{3}{10} = \frac{22}{30} + \frac{9}{30} = \frac{31}{30} = 1\frac{1}{30}$.



✓ $\frac{4}{9} + \frac{1}{4} = \frac{16}{36} + \frac{9}{36} = \frac{25}{36}$.