

СОДЕРЖАНИЕ

Вступление.....	9
-----------------	---

I

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Точки-клеточки	29
Ростки	41
Супер-крестики-нолики.....	52
Одуванчики.....	63
Квантовые крестики-нолики	72
Плеяда геометрических игр	85
Гроздь винограда.....	85
Нейтрон	86
Порядок и хаос.....	88
Брызги.....	91
Трехмерные крестики-нолики.....	93

II

ЧИСЛОВЫЕ ИГРЫ

Китайские палочки.....	105
Числовые цепочки.....	114
От 33 до 99.....	127
Мелочёвка.....	138
Пророчества.....	148
Множество числовых игр.....	162
Посредственность.....	162
Черная дыра.....	164
Джем	166
Звездный пасьянс.....	168
Затор	170
Сборщик налогов.....	171
Любовь и брак.....	173

III КОМБИНАТОРНЫЕ ИГРЫ

Сим.....	184
Тико.....	198
Соседи.....	209
Уголки.....	217
Амазонки.....	229
Калейдоскоп комбинаторных игр.....	242
Повороты.....	243
Доминирование.....	245
Своя линия.....	247
Кошки и собаки.....	249
Приказные крестики-нолики.....	250

IV РИСКОВЫЕ ИГРЫ

Подсечка.....	261
Арпеджио.....	274
Из ряда вон.....	287
Бокс на бумаге.....	302
Формула-1.....	313
Колода рискованных игр.....	322
Свинья.....	322
Пересечения.....	325
Камень-ножницы-бумага-ящерица-Спок.....	327
101 — и тебе крышка.....	329
Мошенничество.....	331
Нарушенная иерархия.....	333

V ИНФОРМАЦИОННЫЕ ИГРЫ

В яблочко и в молоко.....	345
Торговля.....	354
Лоскутное одеяло.....	366
Квантовые карты.....	375

Сесара	387
Мозаика информационных игр.....	398
Морской бой.....	398
Квантовая виселица	401
Спрятанное сокровище.....	403
Узоры II.....	405
Победа, поражение, банан	407
Франко-прусский лабиринт	408
Заключение.....	411
Благодарности	427
Стоп, а почему библиография в этой книге выглядит как ЧaBo?.....	431
Предметно-именной указатель	455

ВСТУПЛЕНИЕ

Для начала вопрос на засыпку: чем вы, по сути, отличаетесь от шимпанзе?

	Вы	Шимпанзе
		
Отстоящий большой палец на руках	✓	✓
Умное лицо	✓	✓
Умение формировать глубокие дружеские отношения	✓	✓
Внутренне непротиворечивые политические убеждения	✗	✗
Умение сортирным юмором	✓	✓

Ответ: детеныш шимпанзе взрослеет, а вы так и остаетесь шимпанзенком.

Я серьезно. Посмотрите на себя: гладкая кожа, маленькая челюсть, огромный округлый череп — все эти характерные черты наши сородичи-обезьяны теряют с возрастом, а вы упрямо сохраняете. Не считите это за упрек — я и сам такой же, друзья. Мы, люди, ребячимся и во взрослой жизни, не расстаемся с «вечной молодостью», как говорил биолог Стивен Джей Гулд. Сохранение во взрослом состоянии признаков более ранних стадий развития, или по-научному *педоморфоз*, — своего рода наша визитная карточка, отличительная особенность среди приматов. Самое приятное — мы не просто выглядим как детеныши шимпанзе. Наше поведение тоже схоже: мы обезьянничаем, исследуем, ломаем голову — одним словом, *играем*.

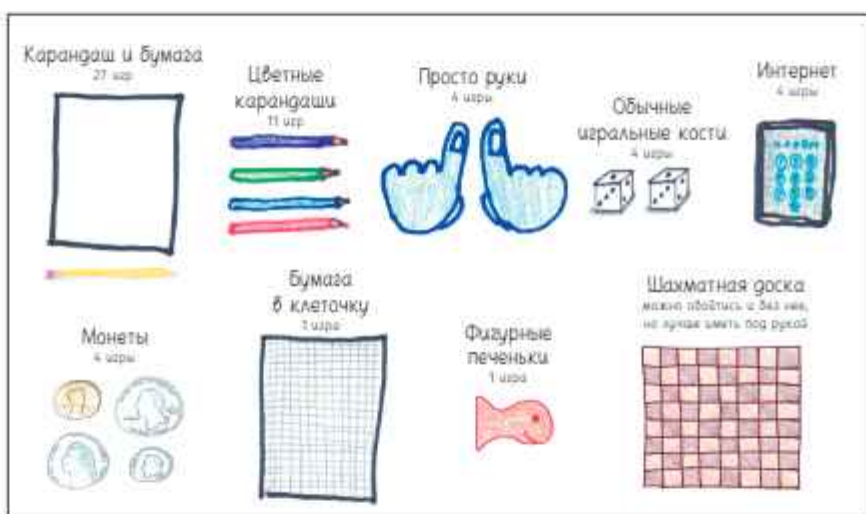
Вот так, мои детсколицые читатели, мы и стали гениями в отряде приматов. Так мы возвели пирамиды, наследили на Луне и записали мультиплатиновый альбом *Abbey Road*. Отказываясь повзрослеть и перестать дурачиться. Секрет нашей даровитости в том, что мы не прекращаем учиться, а секрет нашей обучаемости в том, что мы не прекращаем играть.

Ну что, сыграем?

КАК ИГРАТЬ С ЭТОЙ КНИГОЙ

Что потребуется

1. Обычные вещи, которые легко найти дома. Я отдаю предпочтение играм, для которых требуется только карандаш и бумага, хотя для некоторых понадобится кое-что еще. Детали изложены в каждой главе и обобщены в сводных таблицах. (Не нужны даже настоящие игральные кости, просто введите в браузер запрос «бросить кости».)



Для каждой игры указаны те предметы, которые труднее всего раздобыть. Учтены лишь основные игры. Действуйте строго в рамках законодательства! Но если там, где вы находитесь, игры вообще запрещены, вам крупно не повезло

2. Партнеры по играм. Множество математических книг предназначены для того, чтобы забавляться в одиночку. Но не эта. Я работал над ней в период «социального дистанцирования», после того как разразилась пандемия, поэтому неудивительно, что в итоге получилось признание в любви к общению. Так что, за исключением нескольких игр, вам потребуются компаньоны. И хотя моя целевая аудитория — великовозрастные шимпанзята, большинство игр оценит даже десятилетний ребенок, а многие подходят и для тех, кому всего шесть.

3. **Здоровая толика педоморфоза.** «В раннем возрасте многие животные играют и проявляют гибкость, — писал Стивен Джей Гулд, — но, повзрослев, следуют жестко запрограммированным шаблонам». Я преподаю математику и не буду отрицать: зачастую кажется, что школьные уроки математики рассчитаны на каких-то других созданий — из тех, кто слепо движется по колее. Возможно, на термитов? Неудивительно, что в школе проявляются худшие стороны нашего мышления: мы скованны, подавлены тревогой и лишены воображения. Читая эту книгу, похороните в памяти школьное прошлое и вспомните свою истинную природу. Пусть внутри вас проснется ребенок.

В чем цель? Выявить лучшее в человеческом мышлении.

Какие правила?

1. Эта книга — обзор забав, знакомых только людям: игр, иначе говоря, забав, где соблюдают правила. Игр на свете прелекное множество: от тех, где правил выше крыши (например, «Монополия»), до тех, где правило всего одно (например, «Пол — это лава!»); от тех, что строятся на беспощадной конкуренции (например, «Монополия»), до тех, где требуется тесная сплоченность (например, «Пол — это лава!»);

СЛИШКОМ СЛОЖНЫЕ ИГРЫ, КОТОРЫЕ Я ОТВЕРГ



Конусы Даншира



Битва за Северную Африку



Теория категорий



Крикет

СЛИШКОМ ПРОСТЫЕ ИГРЫ, КОТОРЫЕ Я ОТВЕРГ



Крестики-нолики



Кресты-нули



Дырки-звездки

от наихудших артефактов человеческой культуры (например, «Монополия») до наилучших (например, «Пол — это лава!»).

Для этой книги я подобрал такие игры, где простые, элегантные правила — залог изысканной и каверзной забавы. Как говорится, легко научиться, трудно достичь мастерства.

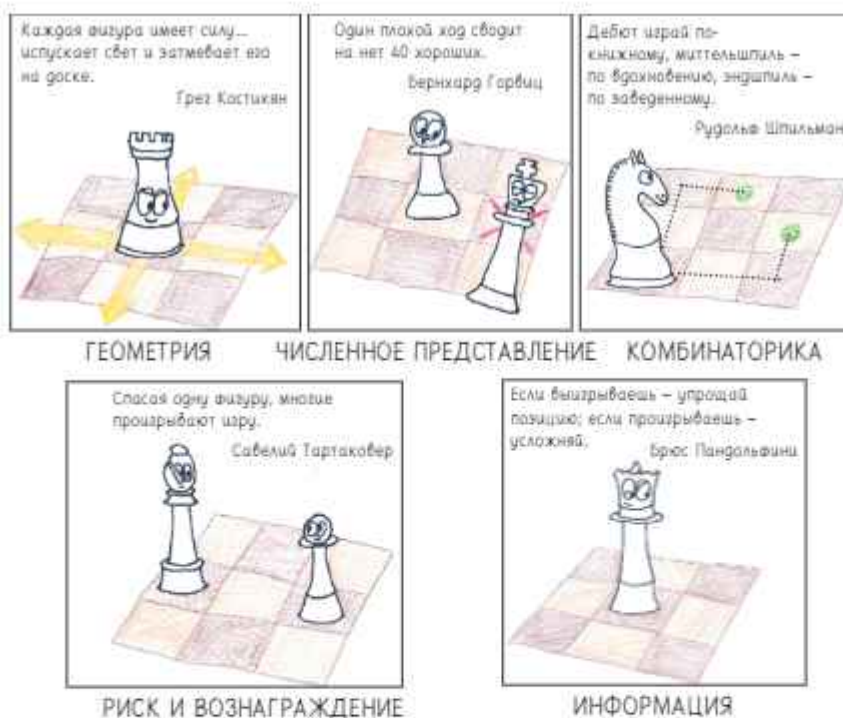
2. А что такое математические игры? Отличный вопрос. Первым его задал мне Вито Сауро, один из самых благодушных экспертов Миннесоты по настольным играм. Почти у всех настольных игр, заметил он, математическая суть просто под разными обличьями. Уж не хочу ли я объять необъятное?

Нет-нет, ответил я. Согласно моему определению, математической является игра, создающая впечатление, как бы это сказать, *математичности*, что ли.

Вито счит этот ответ (1) на редкость туманным и (2) вполне удовлетворительным. Как бы то ни было, я попытался

собрать под одной обложкой неустаревающие игры, требующие логики, стратегического и пространственного мышления. Я руководствовался тремя критериями: игра должна быть (1) занятной, (2) необременительной и (3) пробуждающей математическое мышление*.

3. Книга состоит из пяти частей: «Геометрические игры», «Числовые игры», «Комбинаторные игры», «Рисковые игры», «Информационные игры». Эта классификация довольно условна. Не воспринимайте ее как идеальную таксономию, где все экземпляры разложены по полочкам и на каждом наклеена бирка. Например, шахматы можно спокойно отнести к любой из пяти категорий — каждый раз вы увидите их под новым углом.



* Я обуздал свои педагогические порывы и не стал включать такие классные техники, как «полимино», «своя игра с системами уравнений» и «кто быстрее сделает домашнюю работу».

Каждая часть начинается с шуточного эссе о соответствующей области математики. Затем идут пять популярных игр, чья сложность последовательно возрастает (внутри части, а не по всей книге). Завершается часть кратким описанием разнородных игр (включая мои самые любимые).

4. Описание всех игр имеет одинаковую структуру. Во-первых, в разделе «Как играть» я рассказываю суть: количество игроков, необходимый реквизит, цель и правила.

Во-вторых, в разделе «Заметки дегустатора» я подробно описываю вкусовую гамму игрового процесса, неуловимое *je ne sais quoi**. Возможно, вы узнаете пару стратегических хитростей, но это не главное. Я стараюсь показать тонкие оттенки и нюансы математической игры, которые настолько изысканны, что вино по сравнению с ними похоже на прокисший виноградный сок**.



В-третьих, в разделе «Генеалогия игры» я излагаю то, что знаю о происхождении игр. Какие-то из них уходят корнями в глубину веков и неподвластны времени, другие — дурац-

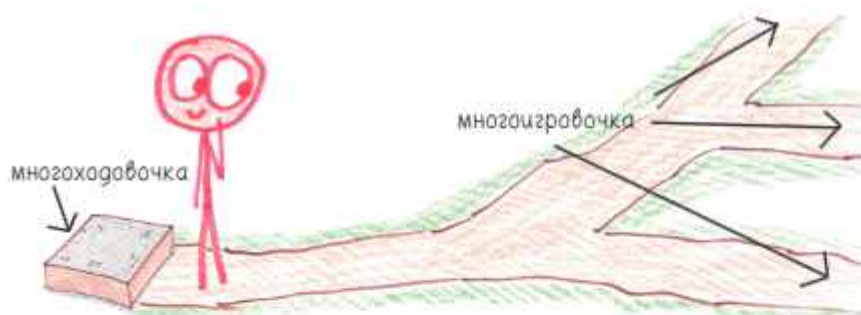
* *Je ne sais quoi* (фр.) — невыразимая суть произведения искусства, букв. «то, не знаю что». — Прим. пер.

** Пояснение для юных, кто не в курсе: вино — это и есть прокисший виноградный сок.

кие и новомодные, а есть и ни то ни сё (не спрашивайте, как такое может быть, просто примите как данность).

В-четвертых, в разделе «Почему эта игра важна?» я рассказываю, почему игра выявляет лучшее в человеческом мышлении. Возможно, она воспроизводит квантовую структуру материи. Возможно, обнажает строгую красоту топологии или циничную логику предвыборных махинаций. Возможно, пробуждает вашего внутреннего гения или, того лучше, шимпанзе. Так или иначе, на мой взгляд, это суть главы и главная цель всей книги.

Наконец, в разделе «Вариации и родственные игры» я показываю заманчивые ответвления, которые вы можете исследовать. Иногда это незначительные видоизменения правил, иногда — совершенно новые игры, связанные с оригиналом исторически, концептуально или по духу.



5. Под занавес приведены сводные таблицы, обобщающие игры и общедоступная библиография, изложенная в форме ответов на часто задаваемые вопросы.

Да, и еще там я объясняю, откуда же взялось странное число $75\frac{1}{2}$. Если вас мучает вопрос «Что такое четверть игры?», то не сомневайтесь, все не так просто.

ЗАМЕТКИ ДЕГУСТАТОРА ОБ ЭТОЙ КНИГЕ

Вы вольны читать эту книгу как любую другую. Переворачивайте страницы. Вежливо улыбайтесь шуткам. Мурлычьте под нос: «Вау, ничего себе рисунки. Я не прогадал, что раскошелился». Двигаясь от главы к главе, от начала к концу, от игры к игре, вы прекрасно проведете время.

Но лишитесь настоящего удовольствия.

Эта книга предназначена для того, чтобы с ней играли. Человек, играющий с математикой, похож на слона, получающего удовольствие от своего хобота, птицу, получающую удовольствие от своих крыльев, или Бэтмена, который получает удовольствие от своего навороченного автомобиля. Ради этого они и родились. Ваша способность к математическому мышлению — дар такого масштаба, что ему нет аналогов в животном мире (его превосходит разве что кошачье искусство презрения). Пожалуйста, не оставляйте этот подарок эволюции нераспакованным. Достаньте его. Поиграйте с ним. Или по крайней мере уподобьтесь кошке и поиграйте с оберточной бумагой.

Большинство игр предназначено для нескольких игроков. Надеюсь, вы найдете компаньона, который разделит ваше любопытство и попробует вместе с вами освоить их. «Там, где царит соперничество, можно преподавать лишь мертвую математику, — сказала математик Мэри Эверест Буль. — Живая математика должна быть общим достоянием». На мой взгляд, даже состязательные игры — это совместные проекты, в которых умы объединяются, чтобы выстраивать необычные логические и стратегические цепочки. Давид Бронштейн называл это «мышлением на двоих». Карл Меннингер — «прогрессивной диффузией умов». Я предпочитаю говорить проще: «игра».

Как бы то ни было, это книга, и я очень надеюсь, что вы ее прочтете. Каждая игра высвечивает ту или иную истину о математике, от комбинаторного взрыва до теории информации. А эти математические истины проливают свет на игры. Кажется, что света слишком много? Не пугайтесь. Ваши глаза скоро привыкнут. Как однажды написал преподобный Чарльз Калед Колтон, «изучение математики, подобно Нилу, начинается с малого и кончается великим».

ГЕНЕАЛОГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИГР

Игры, о которых я рассказываю в этой книге, рождались в парижских университетах, японских школьных дворах, шумных игорных залах, редакциях аргентинских журналов, их авторы — скромные энтузиасты и бессовестные выскочки, подвыпившие профессора и озорные дети. Эти игры многогранны, ибо многогранна математика; несерьезны, ибо несерьезна математика. И они общедоступны, ибо математика общедоступна, что бы там ни говорили устрашающие формулы и язвительные профи.

Грубо говоря, я позаимствовал игры из четырех областей:

1. Традиционные детские игры, например «Морской бой», «Китайские палочки», «Точки-клеточки».
2. Игры для приятного времяпрепровождения, например «Тико», «Бокс на бумаге» и «Амазонки».
3. Концептуальные игры, придуманные математиками, например «Сим», «Ростки» и «Доминирование».
4. Необычные школьные игры, например «Соседи», «Из ряда вон», «101 — и тебе крышка».

Как появляются игры? Что зажигает математический огонь? Я сам придумал девять игр, и мне бы следовало знать. Но нет единого пути, нет общей родословной. Индия подарила нам шахматы, Китай — го, Мадагаскар — фанорону, а мой двухлетний племянник Скандер — пляски возле пазла с воплем «мовававава».

Почему математические игры настолько универсальны? Честно говоря, не знаю. Возможно, потому что универсум настолько математичен.

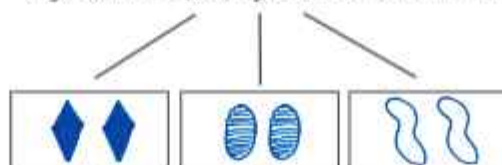
Показательный пример: в 1974 году генетик Марша Джин Фалько начала рисовать символы на каталожных карточках. Это был инструмент исследования: каждая карточка озна-

чала собаку, а каждый символ — генетическую комбинацию. Но после перетасовки и перегруппировки карточек все детали отпали. Она увидела чистые комбинации, абстрактные модели. Игру логики. Логику игры. «Материя не привлекает внимания [математиков], — писал Анри Пуанкаре, — их интересует только форма». Ветеринар, заглядывая через плечо Марши, стал задавать вопросы и натолкнул ее на идею игры.

Так родилось любимое развлечение Стивена Хокинга, любимая тема исследований ведущих математиков и одна из популярнейших карточных игр XX века: «Сет».

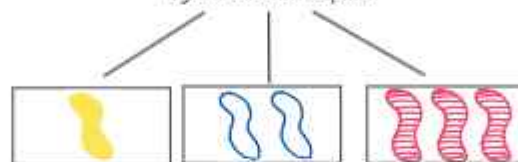
Сет – три карты, совпадающие или различающиеся по всем признакам.

Одинаковый цвет, одинаковое количество



разная заливка, разная форма

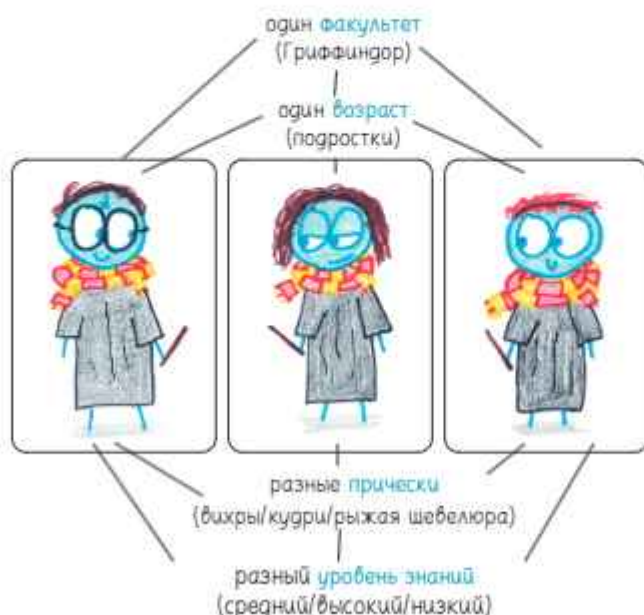
одинаковая форма



разные цвет, заливка, количество



разные цвет, заливка, форма, количество



В том же самом, 1974, году один венгерский архитектор поставил перед собой конструкторскую задачу: можно ли сделать большой куб из маленьких кубиков, которые двигаются независимо друг от друга? Он попытался. И у него получилось. А потом ему взбрело в голову приклеить цветную бумагу на грани кубиков и покрутить их. Это был поворотный момент его жизни. «Парад красок приятно ласкал взгляд, — вспоминал он позже, — но в конце концов я решил, что настала пора возвращаться, как после отменной обзорной экскурсии... и привести кубики в порядок».

Он попытался. Но не тут-то было. Как азартный человек, он увлекся. Спустя месяц куб удалось, наконец, вернуть в исходное состояние. Так Эрнё Рубик стал создателем самой продаваемой игрушки в истории человечества.

«Сет» и кубик Рубика демонстрируют нам два фундаментальных пути математической мысли. Вы можете начать с реальности, как Марша, и отыскивать ее абстрактную структуру или начать с абстрактной структуры, как сделал Эрнё, и искать ее смысл в реальности. В этом плане «Сет» и кубик



Рубика не просто позволяют играть другим; они сами являются плодами игры воображения, праздного искусства гениальных приматов, которые никогда не перестают учиться.

ПОЧЕМУ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ ВАЖНЫ

Потому что они выявляют лучшее в человеческом мышлении.

В 1654 году некий азартный игрок написал двум математикам с просьбой решить головоломку. Представьте, что двое играют в орлянку. Первый, кто наберет семь очков, выигрывает сотню долларов. Но когда счет был 6:4, игра прервалась. Как честно разделить приз?

Два математика, Блез Паскаль и Пьер Ферма, решили задачу*, более того, благодаря их решению началось математиче-

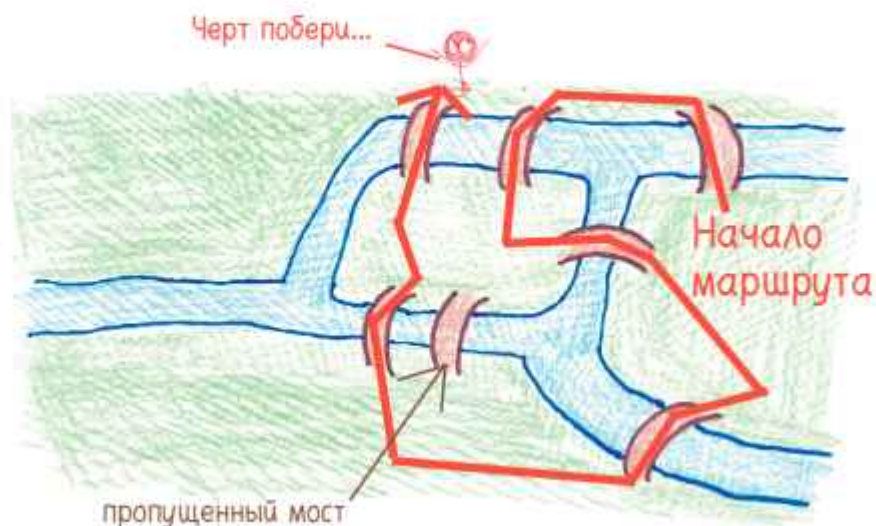
* Спойлер: единственный шанс отстающего игрока на победу — выиграть три раунда подряд. Таким образом, его шансы 1:8. Следовательно, он получит одну восьмую приза (\$12,5), а второй игрок — \$87,5.

ское изучение неопределенности, которое мы сейчас называем *теорией вероятностей*.

Это фундаментальное орудие современности появилось на свет благодаря простой головоломке, связанной с игрой случая.



А вот еще одна история из жизни. Воскресными днями в 1700-е годы жители Кёнигсберга (ныне Калининград), прогуливаясь по четырем районам родного города, пытались пройти по всем семи мостам (Кузнечному, Рабочему, Зеленому, Лавочному, Деревянному, Высокому и Медовому), но только один раз. Успеха не добился никто. А в 1735 году математик Леонард Эйлер доказал, что это невозможно. Такого маршрута попросту не существовало. Его доказательство легло в основу *теории графов* — исследования сетей, охватывающего все на свете, от соцсетей и поисковых алгоритмов в интернете до эпидемиологии. Google и битва против COVID-19 берут свое начало в праздном времяпрепровождении пруссаков XVIII века.



Хотите еще пример? Почтим память Джона Хортон Конвея, великого математика, — он покинул наш мир, когда я работал над этой книгой. Конвей исследовал самые разные области математики, от клеточных автоматов до абстрактной алгебры. А кроме того, он вновь и вновь возвращался к играм. Его любимым открытием были сюрреальные числа, которые кодировали структуру игр для двух игроков в числовую систему. Его самое известное (и, следовательно, наименее любимое) открытие показало, как вселенская сложность может возникнуть из нескольких простых правил; он придумал игру под названием «Жизнь».

«Я был поражен тем, какую роль его идеи об играх сыграли в работе над решетками, кодами и упаковками... Какие шансы у математика, который любит игры, обнаружить, что игры подспудно лежат в основе других областей, которые он изучает?» — пишет математик и поклонник этой игры Джим Пропп.

Я мог бы и продолжить — например, еженедельная вечерняя партия в покер вдохновила Джона фон Неймана на создание теории игр, чьи стратегические выводы сейчас пронизывают экологию, дипломатию и экономику, — но в мои планы не входит воспевание пользы математики для народного хозяйства. По правде говоря, мне дела нет до того, что матема-



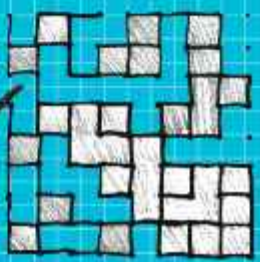
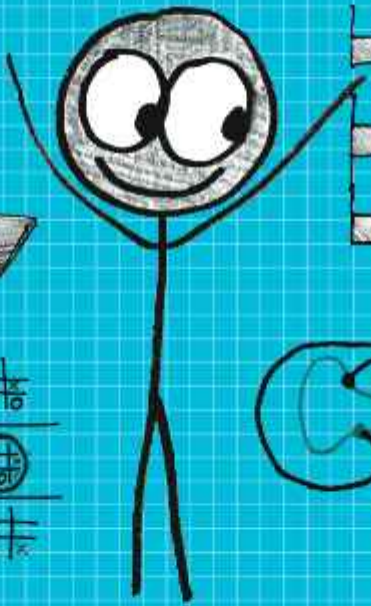
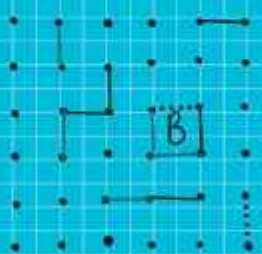
математическая игра помогла кому-то заработать миллиарды или сколотить триллионы долларов. По-моему, это случайный побочный продукт математической игры.

Когда вы отрываетесь от игры и обнаруживаете, что невольно изменили ход человеческой истории, то понимаете — это игра с огнем, причем с особым.

«Все хорошие идеи — это игра», — пишет Мейсон Хартман. Она имеет в виду, что наш разум исследует идеи так, как детеныш шимпанзе исследует лес, свободно и самозабвенно. Это не игра в «Парчизи», где каждый ход направлен на победу; скорее, это игра воображения, игра «а что, если...», эстафета поколений, неугасимый факел. «Игра, имеющая конец, ведется ради победы, — писал Джеймс Карс, — бесконечная игра — ради самой игры».

Мы часто воспринимаем математику как набор игр, имеющих конец, — вопросов, требующих ответа; головоломок, которые предстоит решить; теорем, которые необходимо доказать. Но все вместе они образуют необозримую и нескончаемую игру, захватывающую мысли любой разумной обезьяны. «Я люблю математику, — сказала математик Роза Петер, — потому что человек вдохнул в нее дух игры, и она дала ему его величайшую игру — умпостижение бесконечности».

По моему скромному мнению, величайшая игра человечества — «Пол — это лава!», но время от времени я все же приобщаюсь к умпостижению бесконечности. Сердечно приглашаю и вас присоединиться к этому.



$\# \#$	$\# \# \times$	$\# \# \circ$
$\# \#$	$\# \# \times$	$\# \# \circ$
$\# \# \times$	$\# \# \circ$	$\# \# \times$



I

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Здесь вы познакомитесь с пятью играми, действие которых разворачивается в непохожих пространствах. Надеюсь, вы вынесете отсюда как минимум то, что *есть разные виды пространства*.

Игра в «Точки-клеточки» напоминает вычерчивание градостроительного плана на миллиметровке. «Ростки» расползаются по змеящемуся, зыбкому пейзажу. «Супер-крестики-нолики» представляют собой фрактальный мир микрокосмов, макрокосмов, повторов. «Одуванчики» — игра продуваемых ветрами равнин и суровых векторов. Наконец, «Квантовые крестики-нолики»

