Содержание

ГЛАВА 12

Количественная оценка неопределенности

В данной главе показано, как должен действовать агент в условиях неопределенности со степенью доверия, представленной в числовом виде.

12.1. Действия в условиях неопределенности

Агенты в реальном мире должны справляться с ►**неопределенностью**, будь то по причине частичной наблюдаемости, недетерминизма или действий противников. Агент может никогда не знать наверняка, в каком состоянии он сейчас находится или где он окажется после выполнения некоторой последовательности действий.

Мы уже знакомы с агентами, решающими задачи, и логическими агентами, справляющимися с неопределенностью посредством отслеживания цепочки **доверительных состояний** — представления множества всех возможных состояний мира, которые могут в нем проявиться — и формирования условного плана, позволяющего справиться с любой возможной случайной ситуацией, о которой его датчики могут сообщить во время его выполнения. Подобный подход работает для простых задач, но имеет определенные недостатки.

- Агент должен рассмотреть *все возможные* объяснения для результатов наблюдений своих датчиков, и при этом не важно, насколько эти объяснения будут маловероятны. Такой подход приводит к формированию огромного доверительного состояния, полного почти невероятных возможностей.
- Правильный условный план, учитывающий любую возможность, может вырастать до сколь угодно больших размеров и должен учитывать сколь угодно маловероятные непредвиденные обстоятельства.
- Иногда не существует плана, который гарантированно приводит к цели, но агент все равно должен действовать. Он должен иметь какой-то способ сравнения достоинств различных планов, которые не являются гарантированно достигающими цели.

Например, предположим, что автоматизированному такси поставлена цель — доставить пассажира в аэропорт к заданному времени. Агент такси формирует план, A_{90}, предусматривающий выезд из дома за 90 минут до установленного времени отправления рейса и движение такси с разумной скоростью. Даже если аэропорт находится всего в 5 милях от дома, логический агент не сможет с абсолютной уверенностью прийти к заключению, что "План A_{90} позволяет добраться до аэропорта к назначенному времени". Вместо этого он придет к более слабому заключению: "План A_{90} позволяет прибыть в аэропорт вовремя, если машина не сломается и не попадет в аварию, и дорога не будет закрыта, и в машину не попадает метеорит, и…" Ни по одному из этих условий нельзя вынести гарантированно верное суждение, поэтому невозможно сделать вывод, что план обязательно будет успешным. Это логическая **проблема квалификации** (см. раздел 7.7.1), для которой до сих пор не найдено реального решения.

Тем не менее в некотором смысле план A_{90} действительно представляет собой правильное руководство к действию. Что имеется в виду под этим утверждением? Как уже говорилось в главе 2, под этим подразумевается, что из всех планов, которые могут быть выполнены, именно план A_{90}, как ожидается, позволит максимизировать показатели производительности агента (здесь это ожидание строится на основании знаний агента об окружающей среде). Показатели производительности включают своевременную доставку пассажира в аэропорт к указанному рейсу, предотвращение продолжительного, непродуктивного ожидания в аэропорту и исключение штрафов за превышение скорости по пути в аэропорт. Знания агента не позволяют гарантировать достижения любого из этих трех результатов при выполнении плана A_{90}, но могут обеспечить некоторую степень уверенности, что они будут достигнуты. Другие планы, например A_{180}, могут повысить степень уверенности агента в том, что он доставит пассажира до аэропорта вовремя, но одновременно повысят для него и вероятность продолжительного, скучного ожидания. ➔ *Следовательно, выбор правильного способа действия — **рационального решения** — зависит как от относительной важности различных целей, так и от степени уверенности в том, что они могут быть достигнуты.* В оставшейся части данного раздела эти идеи будут уточнены с целью подготовки к разработке общих теорий проведения рассуждений в условиях неопределенности и принятия рациональных решений, которые будут представлены в этой и последующих главах.

12.1.1. Учет наличия неопределенности

Рассмотрим простой пример рассуждений при наличии неопределенности: диагностика причин зубной боли у пациента. Диагностика — при медицинском обследовании, при ремонте автомобиля или в любых других случаях — почти всегда связана с неопределенностью. Попробуем записать правила для диагностики заболеваний зубов с использованием логики высказываний, что явным образом укажет на трудности, возникающие при простом логическом подходе. Рассмотрим следующее простое правило (здесь *Toothache* — зубная боль, а *Cavity* — полость):

$$Toothache \Rightarrow Cavity.$$

Проблема состоит в том, что это правило неверно. Не у всех пациентов с зубной болью обязательно имеется полость, — у некоторых причиной боли может быть заболевание десен (*GumProblem*), нарыв (*Abscess*) или одна из нескольких иных сложных ситуаций.

$$Toothache \Rightarrow Cavity \lor GumProblem \lor Abscess \ldots$$

К сожалению, чтобы сделать это правило истинным, потребуется ввести в него почти бесконечный список возможных причин. Это правило можно попытаться преобразовать в причинное правило:

$$Cavity \Rightarrow Toothache.$$

Но и это правило нельзя назвать верным; не все зубы, имеющие полость, обязательно вызывают болевые ощущения. Единственный способ исправить данное правило состоит в том, чтобы сделать его логически исчерпывающим: дополнить левую сторону описаниями всех обстоятельств, которые должны иметь место для того, чтобы полость действительно вызывала зубную боль. Следовательно, попытка использовать логику для решения задач в проблемной области, подобной медицинской диагностике, оканчивается неудачей по следующим трем основным причинам.

- ►**Экономия усилий**. Для формирования полного множества антецедентов или консеквентов, необходимого для составления правила, не имеющего исключений, потребуется слишком много работы, а применение таких правил будет слишком сложным.
- ►**Неполнота теоретических знаний**. Медицинская наука не имеет полной теории для данной проблемной области.
- ►**Неполнота практических знаний**. Даже если известны все теоретические правила, может иметь место неопределенность в отношении диагноза для конкретного пациента, поскольку не все необходимые обследования были или вообще могут быть выполнены.

Связь между зубной болью и наличием полости не является простым логическим следствием, действующим в обоих направлениях. Такая ситуация типична не только для медицинской диагностики, но и для большинства других проблемных областей, связанных с вынесением суждений: юриспруденции, бизнеса и экономики, проектирования, ремонта автомобилей, садоводства, датирования объектов или событий и т.д. Знания агента в лучшем случае позволяют сформулировать релевантные суждения только с определенной ►**степенью уверенности** (*degree of belief*). Нашим основным инструментальным средством для работы со степенями уверенности будет ►**теория вероятностей**. В соответствии с терминологией, представленной в разделе 8.1, **онтологический вклад** логики и теории вероятностей одинаков — мир состоит из фактов, которые имеют либо не имеют места в каждом конкретном случае, но их **эпистемологический вклад** будет разным: логический агент уверен, что каждое высказывание должно быть истинным или ложным, либо у него нет никакого мнения, в то время как вероятностный агент может иметь числовую оценку степени уверенности в диапазоне от 0 (для высказываний, которые точно ложны) до 1 (для высказываний, которые безусловно верны).

➔ *Теория вероятности предоставляет способ суммарного учета неопределенности, возникающей по причинам экономии усилий и неполноты знаний*, тем самым решая проблему квалификации. Можно не знать со всей уверенностью, что именно вызывает зубную боль у определенного пациента, но можно с уверенностью полагать, что, скажем, в 80% случаев — т.е. с вероятностью 0,8, — если пациент испытывает зубную боль, то ее источником является полость в зубе. Это означает, что из всех ситуаций, неотличимых от текущей в пределах тех знаний, которыми обладает агент, в 80% этих случаев у пациента должна быть полость в зубе. Подобная уверенность может быть основана на статистических данных — у 80% пациентов с зубной болью, наблюдавшихся до сих пор, была обнаружена зубная полость, — на некоторых общих знаниях из области стоматологии или на комбинации различных источников.

Один вносящий путаницу момент состоит в том, что при постановке диагноза в реальном мире нет никакой неопределенности: в зубе пациента либо есть полость, либо нет. Так что же означает наше утверждение, что вероятность наличия полости равна 0,8? Разве она не должна быть равна 0 или 1? Ответ состоит в том, что вероятностные высказывания делаются в отношении *состояния знаний* агента, а не в отношении *реального мира*. Мы говорим: "Вероятность того, что пациент имеет зубную полость, *принимая во внимание то, что он испытывает зубную боль*, равна 0,8". Если позднее выяснится, что пациент уже некоторое время страдает заболеванием десен, можно будет прийти к другому заключению: "Вероятность того, что пациент имеет зубную полость, принимая во внимание, что он испытывает зубную боль и страдает заболеванием десен, составляет 0,4". Если будут собраны дополнительные убедительные доказательства против наличия зубной полости, появится возможность утверждать: "Вероятность того, что пациент имеет зубную полость, с учетом всего того, что нам теперь известно, почти нулевая". Обратите внимание, что все приведенные выше заключения не противоречат друг другу, — в каждом есть собственное утверждение о различном состоянии знаний агента.

12.1.2. Неопределенность и рациональные решения

Еще раз вернемся к плану поездки в аэропорт A_{90}. Предположим, что он обеспечивает 97%-ный шанс успешного вылета назначенным рейсом. Означает ли это, что выбор данного плана будет рациональным решением? Вовсе необязательно: могут существовать другие планы — например, A_{180} — с большей вероятностью успешного вылета. Если *жизненно* важно не пропустить именно этот рейс, то стоит рискнуть подождать в аэропорту подольше. А что можно сказать о плане A_{1440}, предусматривающем заблаговременный выезд из дома за 24 часа до отправления самолета? В большинстве ситуаций это будет не лучший выбор, поскольку, хотя он практически гарантирует прибытие в аэропорт вовремя, он предполагает и невыносимо долгое ожидание, не говоря уже о возможности малоприятной диеты из предлагаемого в аэропорту меню.

Чтобы сделать подобный выбор, агент прежде всего должен иметь сведения о ►**предпочтениях** среди различных возможных ►**результатов** различных планов. Любой результат — это полностью определенное состояние, включая такие факторы, как своевременность прибытия и длительность ожидания в аэропорту. Для представления предпочтений и количественных рассуждений о них мы будем использовать ►**теорию полезности** (*utility theory*). (Термин "полезность" в данном контексте обозначает "свойство быть полезным".) Теория полезности утверждает, что для агента каждое состояние (или последовательность состояний) имеет определенную степень полезности (или просто *полезность*) и что агент всегда должен отдавать предпочтение состояниям с более высокой полезностью.

Для агента полезность состояния является величиной относительной. Например, полезность состояния, в котором белые могут поставить мат черным при игре в шахматы, очевидно высока для агента, играющего белыми, и очень низка для агента, играющего черными. Но мы не можем строго следовать оценкам в 1, 1/2 и 0 баллов, которые диктуются правилами проведения шахматных турниров, — одни игроки (включая авторов книги) могут быть в восторге от ничьей с чемпионом мира, тогда как другие игроки (включая прежнего чемпиона мира), едва ли будут ей особенно рады. В любом случае личные вкусы или предпочтения не должны учитываться: можно полагать, что агент, отдающий предпочтение мороженому с вкраплениями жевательной резинки "Халапеньо" вместо изюма или шоколадных чипсов, — очень странный, но нельзя утверждать, что он очевидно нерационален. Функция полезности может учитывать любое множество предпочтений — необычных или типичных, благородных или порочных. Можно даже учитывать полезность альтруистического поведения, просто включив оценку благополучия других как один из факторов.

Предпочтения, выраженные в виде полезности, комбинируются с вероятностями в общей теории рациональных решений, называемой ►**теорией принятия решений** (*decision theory*):

Теория принятия решений = теория вероятностей + теория полезности.

Фундаментальная идея теории принятия решений состоит в том, что ➔*любой агент является рациональным тогда и только тогда, когда он выбирает действие, позволяющее достичь наибольшей ожидаемой полезности, усредненной по всем возможным результатам данного действия.* Это — принцип ►**максимальной ожидаемой полезности** (*Maximum Expected Utility* — **MEU**). Здесь "ожидаемой" означает "средней"; точнее, это "статистическое среднее" значений полезностей, взвешенных по вероятности их получения. Мы наблюдали этот принцип в действии в главе 5, когда обсуждали выбор оптимальных решений при игре в нарды. В действительности это совершенно общий принцип принятия решений для агентов, действующих в одиночку.

На рис. 12.1 приведен набросок структуры агента, использующего теорию принятия решений для выбора действия. На некотором абстрактном уровне этот агент идентичен агентам, описанным в главах 4 и 7, которые поддерживают доверительное состояние, отражающее историю восприятий на текущий момент. Основное различие заключается в том, что доверительное состояние агента, действующего в соответствии с теорией принятия решений, представляет не только *возможности* для состояний мира, но и их *вероятности*. Основываясь на доверительном состоянии и некоторых знаниях о результатах действий, агент может сделать вероятностные предсказания о результатах выполнения действия и, следовательно, выбрать действие с наибольшей ожидаемой полезностью.

---

function DT-AGENT(*percept*) **returns** действие *action*
  persistent: *belief_state*, доверительное состояние — вероятностные
      убеждения в отношении текущего состояния мира
    action, действие агента

  обновить *belief_state* с учетом действия *action* и восприятия *percept*
  вычислить результирующие вероятности для действий actions
    на основании описаний действий *action* и текущего доверительного
    состояния *belief_state*
  выбрать действие *action* с наивысшей ожидаемой полезностью,
    исходя из вероятностей результатов и информации о полезности
  return *action*

Рис. 12.1. Агент, действующий на основании теории принятия решений и выбирающий рациональные действия

В этой и следующей главах изложение в основном сосредоточено на задаче представления данных и вычислений с учетом вероятностной информации в целом. Глава 14 посвящена методам решения конкретных задач представления и обновления доверительного состояния во времени и прогнозированию результатов. В главе 15 рассматриваются способы комбинирования теории вероятностей с выразительными формальными языками, такими как логика первого порядка и языки программирования общего назначения. В главе 16 теория полезности рассматривается более подробно, а в главе 17 разрабатываются алгоритмы планирования последовательностей действий в стохастических средах. В главе 18 все эти идеи распространяются на многоагентные проблемные среды.

12.2. Вероятность — основная система обозначений

Чтобы агент мог представлять и использовать вероятностную информацию, необходим формальный язык представления неопределенных знаний. Язык теории вероятностей традиционно является неформальным, разработанным человеком-математиком для других математиков. Стандартное введение в элементарную теорию вероятностей вы найдете в приложении А. В этом разделе выбран иной подход, более удобный для потребностей ИИ, в котором теория вероятностей соединяется с понятиями формальной логики.

12.2.1. О каких вероятностях идет речь

Подобно логическим утверждениям, вероятностные утверждения относятся к возможным мирам. В то время как логические утверждения говорят, какие из возможных миров являются строго недопустимыми (все те, в которых утверждение является ложным), вероятностные утверждения говорят о том, насколько вероятными являются различные миры. В теории вероятностей множество всех возможных миров называют ►**пространством элементарных событий**. Возможные миры являются *взаимоисключающими* и *исчерпывающими* — два возможных мира не могут иметь место одновременно, иметь место в реальности допустимо лишь для одного возможного мира. Например, если мы собираемся бросить две (отличимые друг от друга) кости, существует 36 возможных миров, которые следует рассмотреть: (1,1), (1,2), …, (6,6). Для обозначения пространства элементарных событий используется греческая буква Ω (прописная буква “омега”), а буква ω (строчная буква “омега”) используется для ссылок на элементы этого пространства, т.е. на конкретные возможные миры, которые в данном контексте также называют ►**элементарными событиями**.

Полностью определенная ►**вероятностная модель** связывает числовую вероятность $P(\omega)$ с каждым возможным миром.[1] Основные аксиомы теории вероятностей говорят о том, что каждый возможный мир характеризуется вероятностью в пределах от 0 до 1 и что суммарная вероятность всего множества возможных миров равна 1.

$$0 \le P(\omega) \le 1 \quad \text{для каждого } \omega \text{ и } \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1 \qquad (12.1)$$

Например, если предположить, что каждая кость выполнена без изъянов и при броске они не мешают друг другу, то каждый из возможных миров (1,1), (1,2), …, (6,6) характеризуется вероятностью 1/36. Если некоторые грани костей будут

[1] На данный момент мы предполагаем множество возможных миров дискретным и счетным. Корректная обработка непрерывных множеств требует учета определенных сложных моментов, которые менее актуальны для большинства целей в ИИ.

дополнительно утяжелены, то одни миры будут иметь более высокую вероятность, а другие — более низкую, но общая их сумма все равно составит 1.

Вероятностные утверждения и запросы обычно касаются не конкретных возможных миров, а некоторых их множеств. Например, нас может интересовать вероятность того, что при броске двух костей сумма будет равна 11, или вероятность того, что выпадут два одинаковых значения, и т.д. В теории вероятностей эти множества называются ►**событиями** или **исходами** — этот термин уже широко использовался в главе 10 для иной концепции. В логике множество миров соответствует **высказыванию** на формальном языке, в частности для каждого высказывания соответствующее множество содержит только те возможные миры, в которых это высказывание истинно. (Таким образом, в этом контексте "событие" и "высказывание" означают примерно одно и то же, за исключением того, что высказывание выражается средствами формального языка.) Вероятность, связанная с высказыванием, определяется как сумма вероятностей тех возможных миров, в которых оно истинно.

$$\text{Для любого высказывания } \varphi,\ P(\varphi) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega)\,. \tag{12.2}$$

Например, при броске симметричных костей вероятность выпадения суммы 11 можно определить как $P(Total = 11) = P((5,6)) + P((6,5)) = 1/36 + 1/36 = 1/18$. Следует отметить, что теория вероятности не требует полного знания вероятностей для каждого возможного мира. Например, если мы полагаем, что кости были переделаны так, чтобы при броске на них чаще выпадали одинаковые значения, то можем *утверждать*, что $P(doubles) = 1/4$, даже не принимая во внимание то, что при броске чаще будут выпадать, скажем, две шестерки, а не две двойки. Так же, как и в случае логических утверждений, это утверждение *ограничивает* лежащую в основе вероятностную модель без полного ее определения.

Вероятности, такие как $P(Total = 11)$ и $P(doubles)$, принято называть ►**безусловными** или ►**априорными вероятностями**, — они касаются степени доверия к высказываниям *при отсутствии какой-либо другой информации*. Чаще всего, однако, у нас есть *некоторая* информация, обычно называемая ►**свидетельством**, которая уже была получена ранее. Например, при броске двух костей первая из них уже может остановиться со значением 5 и мы, затаив дыхание, ждем, когда остановится вторая. В этом случае нас интересует не априорная вероятность результата броска костей, а ►**условная** или ►**апостериорная вероятность** выпадения дубля, *когда на первой кости* (Die_1) *уже выпала пятерка*. Эта вероятность записывается как $P(doubles|\mathrm{Die}_1 = 5)$, где символ "|" читается как "при условии".[2]

Аналогичным образом, если отправиться к стоматологу на регулярное плановое обследование, то априорная вероятность $P(cavity) = 0{,}2$ может представлять

[2] Оператор | имеет наименьший возможный приоритет, поэтому выражение $P(...|. . .)$ всегда означает $P((...)|(. . .))$.

интерес, но если отправиться стоматологу потому, что болит зуб, то важнее будет апостериорная вероятность $P(cavity \mid toothache) = 0{,}6$.

Важно понимать, что вероятность $P(cavity) = 0{,}2$ по-прежнему остается *имеющей силу* и после появления *зубной боли*, просто она уже не является особенно полезной. Принимая решения, агенту нужно обусловить *все* те свидетельства, которые он наблюдал. Также важно понимать различие, существующее между обусловливанием и логическим следствием. Утверждение, что $P(cavity \mid toothache) = 0{,}6$, не означает “Всякий раз, когда имеет место *зубная боль*, можно сделать заключение, что наличие в зубе *полости* имеет место с вероятностью 0,6”. В действительности оно означает “Всякий раз, когда имеет место *зубная боль* и *у нас нет никакой дополнительной информации*, можно сделать заключение, что наличие в зубе *полости* имеет место с вероятностью 0,6”. Это дополнительное обусловливание имеет большое значение. Например, получив дополнительную информацию о том, что стоматолог так и не обнаружил в зубах пациента никаких полостей, мы, определенно, не захотим прийти к заключению, что наличие в зубе полости имеет вероятность 0,6; вместо этого нам нужно будет использовать заключение $P(cavity \mid toothache \wedge \neg cavity) = 0$.

Говоря языком математики, апостериорные вероятности определяются в терминах априорных вероятностей следующим образом. Для любых высказываний a и b мы имеем

$$P(a \mid b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)}, \tag{12.3}$$

что выполняется всякий раз, когда $P(b) > 0$. Например,

$$P(doubles \mid Die_1 = 5) = \frac{P(doubles \wedge Die_1{=}5)}{P(Die_1{=}5)}.$$

Это определение обретает смысл, если вспомнить, что наблюдение правил b исключает все те возможные миры, в которых b является ложным, оставляя множество, суммарная вероятность которого — просто $P(b)$. В пределах этого множества миры, в которых a является истинным, должны удовлетворять условию $a \wedge b$ и представляют собой дробь $P(a \wedge b)/P(b)$.

Определение апостериорной (или условной) вероятности — уравнение (12.3) — может быть записано в другой форме, называемой ►**правилом умножения вероятностей**:

$$P(a \wedge b) = P(a \mid b)P(b). \tag{12.4}$$

Правило умножения вероятностей, возможно, легче запомнить: оно построено на основании того факта, что для того, чтобы $a \wedge b$ было истинно, необходимо, чтобы b было истинно, а также чтобы истинно было a при данном b.

12.2.2. Язык высказываний в вероятностных утверждениях

В этой и последующих главах высказывания, описывающие множества возможных миров, как правило, будут записываться с использованием нотации, в которой сочетаются элементы логики высказываний, и нотации удовлетворения ограничений. Согласно терминологии, предложенной в разделе 2.4.7, это **развернутое представление**, в котором возможный мир представлен в виде множества пар *переменная*/*значение*. Также возможно использование еще более выразительного **структурного представления**, как показано в главе 15.

В теории вероятностей переменные называются ►**случайными переменными** и их имена всегда начинаются с прописной буквы. Таким образом, в примере с бросанием костей переменные *Total* и Die_1 являются случайными. Каждая случайная переменная является функцией, отображающей проблемную область возможных миров Ω в некоторую ►**область определения значений** (*range*) — множество возможных значений, которые она может принимать. Областью определения переменной *Total* в случае двух костей является множество $\{2,..., 12\}$, а областью определения переменной Die_1 — $\{1,..., 6\}$. Имена значений всегда записываются строчными буквами, поэтому сумму всех значений переменной X можно записать как $\Sigma_x P(X = x)$. Булева случайная переменная имеет область определения $\{true, false\}$. Например, высказывание о том, что были выброшены дубли, можно записать как $Doubles = true$. (Альтернативным вариантом области определения для булевых переменных является множество $\{0, 1\}$, и в этом случае говорят, что переменная имеет распределение ►**Бернулли**.) По соглашению высказывания вида $A = true$ сокращаются до просто a, тогда как высказывания вида $A = false$ сокращаются до $\neg a$. (Использованные в предыдущем разделе имена *doubles*, *cavity* и *toothache* являются сокращением именно этого типа.)

Области определения значений переменных могут представлять собой множество произвольных признаков. Например, для переменной *Age* (*возраст*) можно выбрать область определения в виде множества {*juvenile*, *teen*, *adult*} (т.е. *ребенок*, *подросток*, *взрослый*), а для переменной *Weather* (*погода*) областью определения могут быть значения {*sun*, *rain*, *cloud*, *snow*} (т.е. *солнечно*, *дождь*, *облачно*, *снег*). Если неоднозначное понимание исключено, то обычно принято использовать само значение в тех высказываниях, где определенная переменная имеет это значение; так, значение *sun* можно непосредственно использовать в высказывании $Weather = sun$.[3]

Все предыдущие примеры имеют конечные области определения значений. Переменные также могут иметь бесконечные области определения — либо

[3] Эти соглашения, взятые вместе, приводят к потенциальной неоднозначности в обозначениях при суммировании значений булевых переменных. Например, $P(a)$ — вероятность того, что переменная A имеет значение *true*, тогда как в выражении $\Sigma_a P(a)$ это просто ссылка на вероятность одного из значений a переменной A.

дискретные (например, целые числа), либо непрерывные (например, действительные числа). Для любой переменной с упорядоченной областью определения также допускаются неравенства, такие как $NumberOfAtomsInUniverse \geq 10^{70}$.

Наконец, можно объединить все эти виды элементарных высказываний (включая сокращенные формы для булевых переменных), используя стандартные логические связки логики высказываний. Например, высказывание "Вероятность того, что в зубах пациентки есть полость, с учетом того, что она является подростком и не испытывает зубной боли, составляет 0,1" можно записать следующим образом.

$$P(cavity \mid \neg toothache \wedge teen) = 0{,}1$$

Также в вероятностной нотации для обозначения операции конъюнкции часто используют запятую, поэтому в приведенном выше высказывании левую часть можно было бы записать просто как $P(cavity \mid \neg toothache, teen)$.
Иногда в обсуждение требуется включить вероятности *всех* возможных значений случайной величины. Понятно, что в этом случае можно было бы использовать такую запись:

$$\begin{aligned}
&P(Weather = sun) = 0{,}6,\\
&P(Weather = rain) = 0{,}1,\\
&P(Weather = cloud) = 0{,}29,\\
&P(Weather = snow) = 0{,}01,
\end{aligned}$$

но для сокращения можно применить следующий вариант записи:

$$\mathbf{P}(Weather) = (0{,}6;\ 0{,}1;\ 0{,}29;\ 0{,}01).$$

Здесь выделение **P** полужирным шрифтом указывает, что результатом является вектор чисел, расположенных в некотором предопределенном порядке $\langle sun, rain, cloud, snow \rangle$ в соответствии с областью определения переменной *Weather*. Говорят, что высказывание **P** задает ►**распределение вероятностей** для случайной переменной *Weather*, т.е. присвоение вероятности для каждого возможного значения этой случайной переменной. (В подобном случае при конечной дискретной области определения значений такое распределение называется ►**категориальным распределением**.) Нотация **P** также используется для условных распределений: $\mathbf{P}(X \mid Y)$, присваивая значения $P(X = x_i \mid Y = y_j)$ для каждой возможной пары i, j.

Для непрерывных переменных просто невозможно записать все распределение в виде вектора, поскольку в нем существует бесконечно много значений. Вместо этого можно определить вероятность того, что случайная величина принимает некоторое значение x как параметризованную функцию от x, обычно называемую ►**функцией плотности распределения вероятностей**. Например, высказывание

$$P(NoonTemp = x) = Uniform(x;\ 18C, 26C)$$

выражает уверенность в том, что значение температуры в полдень (переменная *NoonTemp*) будет равномерно распределено между значениями 18 и 26 градусов по Цельсию.

Функция плотности распределения вероятностей (также часто называемая просто **функцией распределения вероятностей**) по смыслу отличается от дискретных распределений. Утверждение, что плотность вероятности равномерно распределена от 18ºC до 26ºC, означает, что существует 100%-ная вероятность того, что значение температуры в полдень попадет в этот диапазон шириной в 8ºC, и 50%-ная вероятность того, что оно попадет в любой поддиапазон шириной 4ºC этого диапазона, и т.д. Принято записывать плотность вероятности для непрерывной случайной величины X в области значения x как $P(X=x)$ или просто как $P(x)$. Интуитивно понятное определение $P(x)$ — это вероятность того, что значение X попадает в произвольно малую область, начинающуюся от x, деленную на ширину этой области:

$$P(x) = \lim_{dx \to 0} P\,(x \le X \le x + dx)/dx.$$

Для переменной *NoonTemp* имеем

$$P(NoonTemp = x) = Uniform(x;\, 18C,\, 26C) = \begin{cases} \dfrac{1}{8C} & \text{если } 18C \le x \le 26C \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь C обозначает шкалу температуры в градусах Цельсия (а не является константой). В выражении $P(NoonTemp = 20{,}18C) = \frac{1}{8C}$ обратите внимание, что $\frac{1}{8C}$ — это не вероятность, а *плотность вероятности*. Вероятность того, что переменная *NoonTemp* имеет значение *точно* 20,18ºC, равна нулю, потому что диапазон 20,18ºC имеет нулевую ширину. Некоторые авторы используют разные символы для дискретных вероятностей и плотностей вероятностей; но мы в этой книге будем использовать обозначение P для конкретных значений вероятности и $\mathbf{P}$ — для векторов значений в обоих случаях, поскольку в действительности путаница возникает очень редко и уравнения чаще всего идентичны. Обратите внимание, что вероятности — это безразмерные числа, тогда как значения функций распределения вероятностей выражаются в некоторых единицах измерения. В нашем примере это единица, обратная градусу Цельсия. Если тот же самый интервал температур потребуется выразить в градусах по Фаренгейту, он будет иметь ширину 14,4 градуса, а плотность вероятности будет иметь значение $1/14{,}4F$.

В дополнение к распределениям по отдельным переменным нам потребуются обозначения и для распределений по нескольким переменным. Для этой цели будем использовать запятые. Например, выражение $\mathbf{P}(Weather,\ Cavity)$ определяет вероятности всех комбинаций значений переменных *Weather* и *Cavity* и представляет собой таблицу вероятностей размером 4×2, называемую ►**совместным рас-**

пределением вероятностей для переменных *Weather* и *Cavity*. Также можно смешивать в выражениях переменные и конкретные значения, например $\mathbf{P}(sun, Cavity)$ является двухэлементным вектором, включающим вероятности наличия в зубе полости в солнечный день и отсутствия полости в зубе в солнечный день.

Использование обозначения **P** делает определение выражений гораздо более кратким, чем они могли бы быть в противном случае. Например, правило умножения вероятностей (см. уравнение (12.4)) для всех возможных значений переменных *Weather* и *Cavity* можно записать в виде единственного уравнения:

$$\mathbf{P}(Weather, Cavity) = \mathbf{P}(Weather \mid Cavity)\mathbf{P}(Cavity)$$

вместо следующих $4 \times 2 = 8$ уравнений (с использованием сокращений W и C):

$$\begin{aligned}
&P(W = sun \land C = true) = P(W = sun \mid C = true)\ P(C = true)\\
&P(W = rain \land C = true) = P(W = rain \mid C = true)\ P(C = true)\\
&P(W = cloud \land C = true) = P(W = cloud \mid C = true)\ P(C = true)\\
&P(W = snow \land C = true) = P(W = snow \mid C = true)\ P(C = true)\\
&P(W = sun \land C = false) = P(W = sun \mid C = false)\ P(C = false)\\
&P(W = rain \land C = false) = P(W = rain \mid C = false)\ P(C = false)\\
&P(W = cloud \land C = false) = P(W = cloud \mid C = false)\ P(C = false)\\
&P(W = snow \land C = false) = P(W = snow \mid C = false)\ P(C = false).
\end{aligned}$$

Как вырожденный случай выражение $\mathbf{P}(sun, cavity)$ не содержит переменных и, следовательно, является вектором нулевой размерности, который можно рассматривать как скалярное значение.

На данный момент мы уже определили синтаксис высказываний и вероятностных утверждений, а также дали часть семантики: уравнение (12.2) определяет вероятность высказывания как сумму вероятностей миров, в которых оно выполняется. Для завершения семантики необходимо сказать, чем эти миры являются и как определить, выполняется ли высказывание в некотором мире. Мы заимствуем эту часть непосредственно из семантики логики высказываний следующим образом. ➨ *Возможный мир определяется как присваивание значений всем рассматриваемым случайным переменным.*

Легко показать, что это определение удовлетворяет основному требованию, согласно которому возможные миры должны быть взаимно исключающими и исчерпывающими (см. упражнение 12.5). Например, если случайными переменными являются *Cavity*, *Toothache* и *Weather*, то существует $2 \times 2 \times 4 = 16$ возможных миров. Более того, истинность любого заданного высказывания легко может быть определена в подобных мирах посредством тех же самых рекурсивных вычислений истинности, которые использовались нами в логике высказываний (см. раздел 7.4.2).

Обратите внимание, что некоторые случайные переменные могут быть избыточными в том смысле, что их значения во всех случаях могут быть получены из значений других переменных. Например, в мире двух игральных костей переменная *Doubles* будет иметь значение *true* только в тех случаях, когда $Die_1 = Die_2$. Включение переменной *Doubles* в качестве одной из случайных переменных в дополнение к переменным Die_1 и $\mathrm{D}ie_2$, как кажется, увеличивает количество возможных миров с 36 до 72, но, конечно же, ровно половина из этих 72 миров будет логически невозможной и, следовательно, иметь вероятность 0.

Из приведенного выше определения возможных миров следует, что вероятностная модель полностью определяется совместным распределением вероятностей для всех случайных переменных — так называемым ►**полным совместным распределением вероятностей**. Например, при наличии случайных переменных *Cavity*, *Toothache* и *Weather* полным совместным распределением вероятностей будет $\mathbf{P}(Cavity, Toothache, Weather)$. Это совместное распределение может быть представлено в виде таблицы размерностью $2 \times 2 \times 4$, содержащей 16 значений. Поскольку вероятность каждого высказывания является суммой по всем возможным мирам, полного совместного распределения в принципе достаточно для вычисления вероятности любого высказывания. Примеры того, как это можно сделать, будут приведены в разделе 12.3.

12.2.3. Аксиомы вероятности и их обоснованность

Основные аксиомы вероятности (уравнения (12,1) и (12,2)) подразумевают определенные отношения между степенями доверия, которые могут быть отнесены к логически связанным высказываниям. Так, можно вывести знакомые отношения между вероятностью высказывания и вероятностью его отрицания:

$$
\begin{aligned}
P(\neg a) &= \textstyle\sum_{\omega \in \neg a} P(\omega) = && \text{по уравнению (12.2)}\\
&= \textstyle\sum_{\omega \in \neg a} P(\omega) + \sum_{\omega \in a} P(\omega) - \sum_{\omega \in a} P(\omega) = && \\
&= \textstyle\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) - \sum_{\omega \in a} P(\omega) = && \text{группируя первые 2 члена}\\
&= 1 - P(a) && \text{по (12.1) и (12.2).}
\end{aligned}
$$

Также можно вывести известную формулу для вероятности дизъюнкции, которую иногда называют ►**формулой** (или **принципом) включений-исключений:**

$$P(a \vee b) = P(a) + P(b) - P(a \wedge b). \tag{12.5}$$

Это правило можно легко запомнить, отметив, что те случаи, когда высказывание a является истинным, вместе с теми случаями, когда высказывание b является истинным, безусловно, охватывают все те случаи, когда истинно высказывание $a \vee b$; но в сумме двух множеств случаи их пересечения будут учтены дважды, поэтому необходимо вычесть $P(a \wedge b)$.

Уравнения (12.1) и (12.5) часто называют ►**аксиомами Колмогорова** в честь математика Андрея Колмогорова, показавшего, как построить остальную часть теории вероятностей на этом простом фундаменте и как справиться с трудностями, вызванными непрерывными переменными.[4] Хотя уравнение (12.2) имеет определенную особенность, уравнение (12.5) показывает, что аксиомы действительно ограничивают степень уверенности, которую агент может иметь в отношении логически связанных высказываний. Это аналогично тому факту, что логический агент не может одновременно быть уверен в высказываниях A, B и $\neg(A \wedge \mathrm{B})$, так как не существует возможного мира, в котором они все три одновременно являются истинными. Однако при использовании вероятностей высказывания относятся не к миру непосредственно, а к собственному состоянию знания агента. Почему же тогда агент не может придерживаться следующего множества убеждений (даже если они нарушают аксиомы Колмогорова)?

$$P(a) = 0{,}4 \qquad P(b) = 0{,}3 \qquad P(a \wedge b) = 0{,}0 \qquad P(a \vee b) = 0{,}8 \tag{12.6}$$

Такого рода вопрос был предметом яростных дебатов, продолжавшихся в течение десятилетий между теми, кто отстаивал допустимость использования вероятностей как единственной обоснованной формы оценки степеней уверенности, и теми, кто отстаивал альтернативные подходы.

Один из аргументов в пользу аксиом вероятностей, впервые сформулированный в 1931 году Бруно де Финетти ([554], 1983), заключается в следующем. Если агент имеет некоторую степень уверенности в истинности высказывания a, то он должен быть способен сформулировать оценку того, в какой степени он безразличен к ставке за или против высказывания a.[5] Можно рассматривать подобную ситуацию как игру между двумя агентами: агент 1 утверждает: “Моя степень уверенности в истинности события a равна 0,4”. Затем агент 2 вправе выбрать, будет ли он делать ставку за или против высказывания a, выбирая ставки, совместимые с заявленной степенью уверенности. То есть агент 2 может решить сделать ставку на то, что событие a произойдет, поставив 6 долл. против 4 долл. агента 1. Или же агент 2 может сделать ставку на то, что будет иметь место событие $\neg a$, поставив 4 долл. против 6 агента 1. Когда исход события a станет известен, тот, кто оказался прав, заберет деньги. Если степень уверенности агента недостаточно точно отражает состояние мира, можно рассчитывать на то, что в долговременной перспективе он будет проигрывать деньги агенту-противнику, убеждения которого более точно отражают его состояние.

Теорема де Финетти относится не к выбору правильных значений для отдельных вероятностей, а к выбору значений вероятностей логически связанных

---

[4] Эти трудности включают множество Витали, четко определенного измеримого подмножества в интервале [0, 1] с неопределенной неизмеримой длиной.

[5] Можно возразить, что предпочтения агента применительно к балансам разных ставок являются таковыми, что возможность потерять 1 долл. не уравновешивается равной возможностью выиграть 1 долл. Один из возможных ответов на подобное возражение состоит в том, что суммы ставок должны быть достаточно малыми для того, чтобы можно было избежать данной проблемы. Анализ, проведенный Сэведжем ([1984], 1954), позволяет полностью исключить из рассмотрения эту проблему.

высказываний. ➔ *Если агент 1 руководствуется множеством степеней уверенности, нарушающим аксиомы теории вероятностей, то всегда существует комбинация ставок агента 2, гарантирующая, что агент 1 будет терять деньги при каждой ставке.* Например, предположим, что агент 1 руководствуется множеством степеней уверенности, приведенным в уравнении (12.6). На рис. 12.2 показано, что если агент 2 решит ставить 4 долл. на a, 3 долл. — на b и 2 долл. — на $\neg(a \vee b)$, то агент 1 всегда будет терять деньги, независимо от исходов для a и b. Из теоремы де Финетти следует, что ни один рациональный агент не может иметь убеждений, нарушающих аксиомы вероятности.

Высказывание	Степень уверенности агента 1	Ставка агента 2	Ставка агента 1	Результаты для агента 1			
				a, b	$a, \neg b$	$\neg a, b$	$\neg a, \neg b$
a	0,4	4 на a	6 на $\neg a$	–6	–6	4	4
b	0,3	3 на b	7 на $\neg b$	–7	3	–7	3
$a \vee b$	0,8	2 на $\neg(a \vee b)$	8 на $a \vee b$	2	2	2	–8
				–11	–1	–1	–1

Рис. 12.2. Поскольку агент 1 придерживается несогласованных убеждений, агент 2 может подобрать множество из трех ставок, гарантирующих постоянный проигрыш для агента 1, независимо от исходов для a и b

Одно общее возражение в отношении теоремы де Финетти состоит в том, что эта игра со ставками является довольно надуманной. Например, что будет, если один из игроков откажется делать ставку? Закончится ли на этом спор? Ответ на данный вопрос состоит в том, что эта игра со ставками представляет собой абстрактную модель для ситуации принятия решений, в которую любой агент *неизбежно* вовлечен в любой момент. Каждое действие (включая бездействие) — это своего рода ставка, а каждый исход может рассматриваться как положительное или отрицательное вознаграждение за эту ставку. Отказ делать ставку подобен отказу позволить времени двигаться.

В пользу применения вероятностей были выдвинуты и другие весомые философские аргументы, из которых наиболее заметными можно считать работы Кокса ([489], 1946), Карнапа ([374], 1950) и Джейнса (2003). В каждой из них предлагается множество аксиом для рассуждений со степенями доверия: отсутствие противоречий, соответствие положениям обычной логики (например, если степень доверия к A возрастает, то степень доверия к $\neg A$ должна уменьшаться) и т.д. Единственная спорная аксиома состоит в том, что степени доверия должны быть представлены числами или по крайней мере вести себя, как числа, например обладать свойством транзитивности (если степень доверия к A больше, чем степень доверия к B, которая больше, чем степень доверия к C, то степень доверия к A должна быть больше, чем к C) и свойством сравнимости (степень доверия к A должна быть либо равна, либо больше, либо меньше, чем степень доверия к B). Можно доказать, что применение вероятностей является единственным подходом, удовлетворяющим все эти аксиомы.

Но мир таков, каков он есть, и практические свидетельства иногда оказываются более весомыми, чем доказательства. Успех систем формирования рассуждений, основанных на теории вероятностей, оказался гораздо более эффективным аргументом в пользу пересмотра многих взглядов, чем любая философская аргументация. В следующем разделе показано, как приведенные выше аксиомы можно применить к логическому выводу.

12.3. Логический вывод с использованием полных совместных распределений

В этом разделе описывается простой метод ►**вероятностного вывода**, т.е. вычисления апостериорных вероятностей для высказываний, сформулированных как ►**запросы** на основании наблюдаемых свидетельств. В качестве "базы знаний", из которой можно будет вывести ответы на все запросы, мы будем использовать полное совместное распределение. По ходу дела также будет представлено несколько полезных методов манипулирования уравнениями, включающих вероятности.

Начнем с очень простого примера — проблемной области, состоящей только из трех булевых переменных, *Toothache*, *Cavity* и *Catch* (*щипцы*) (неприятные ощущения от захвата зуба стальными стоматологическими щипцами все еще свежи в памяти автора). Полное совместное распределение этих переменных представляет собой таблицу размером $2 \times 2 \times 2$, представленную на рис. 12.3.

	toothache		*¬toothache*	
	catch	*¬catch*	*catch*	*¬catch*
cavity	0,108	0,012	0,072	0,008
¬cavity	0,016	0,064	0,144	0,576

Рис. 12.3. Полное совместное распределение для мира *Toothache*, *Cavity*, *Catch*

Обратите внимание, что вероятности в этом совместном распределении в сумме составляют 1, что и требуется согласно аксиомам вероятности. Также обратите внимание, что уравнение (12.2) предоставляет прямой способ вычисления вероятности любого высказывания, простого или сложного: достаточно определить те возможные миры, в которых данное высказывание является истинным, а затем сложить их вероятности. Например, имеется шесть возможных миров, в которых высказывание $cavity \lor toothache$ является истинным: