Содержание

Вступительное слово

Если бы математику преподносили в ее естественной форме, со всеми радостями и сюрпризами, то, думаю, мы стали бы свидетелями кардинального изменения как в отношении студентов к математике, так и в нашем представлении о том, что значит быть «хорошим математиком».

Пол Локхарт

Я по-настоящему жаден до сюрпризов, потому что каждый из них делает нас чуточку умнее.

Тадаши Токиеда

При правильном подходе математика может подарить множество приятных сюрпризов. Это подтверждает поиск по запросу «mathematical surprises», на который Google выдает почти полмиллиарда результатов. А что такое сюрприз? Этимология восходит к старофранцузскому слову с латинскими корнями «sur» (сверх) и «prendre» (брать, хватать, завладевать). Буквально, преподнести сюрприз означает «захватить врасплох». А в роли существительного сюрприз – это и непредвиденное или приводящее в замешательство событие или обстоятельство, и вызываемая этим эмоция.

Рассмотрим, к примеру, цитату из лекции Максима Брукхеймера[1], посвященной окружности Фейербаха»: «Через две точки можно провести одну и только одну прямую, это не сюрприз. Однако три точки необязательно лежат на одной прямой, и если в ходе геометрических рассуждений выясняется, что три точки оказывались на одной прямой, то это уже сюрприз, и зачастую этот факт следует оформить в виде теоремы, подлежащей доказательству. Любые три точки, не лежащие на одной прямой, лежат на окружности. Но если на окружности оказываются четыре точки, то это сюрприз, заслуживающий названия теоремы… А если число точек, лежащих на прямой, больше трех, то теорема тем более удивительна. Аналогично, если число точек, лежащих на окружности, больше 4, то теорема удивительна вдвойне. Поэтому утверждение, согласно которому с любым треугольником связаны девять точек, лежащих на одной окружности, … весьма удивительно. Но, несмотря на сильнейшее удивление, его доказательство просто и элегантно».

В этой книге Мордехай Бен-Ари предлагает обширную подборку математических сюрпризов, большинство из которых не так широко известны, как окружность Фейербаха. Для включения каждого из них есть веские основания. Во-первых, хотя в учебниках эти математические жемчужины не встретишь, все они доступны любому человеку, окончившему среднюю шко-

[1] Максим Брукхеймер был одним из математиков, основавших Открытый университет в Великобритании, и деканом его математического факультета. Он занимал должность начальника отдела преподавания науки в институте Вейцмана.

лу (и имеющему достаточно терпения, бумагу и карандаш, поскольку за удовольствие надо платить). Во-вторых, когда математический результат ставит под сомнение то, что мы привыкли считать само собой разумеющимся, мы испытываем настоящее удивление (главы 1, 13). Точно так же сюрпризами становятся: изящество рассуждения (главы 2, 3), обоснование возможности геометрического построения алгебраическими средствами (глава 16), доказательство, основанное на соображениях из, казалось бы, совершенно другой области (главы 4, 5), необычное доказательство по индукции (глава 5), новый взгляд на хорошо известный результат (глава 7), маловажная, на первый взгляд, теорема, легшая в основу целой отрасли математики (глава 8), неожиданные источники вдохновения (глава 9), глубокие формализмы, берущие начало в таком чисто развлекательном занятии, как оригами (главы 10–12). Все это причины для включения красивых и запоминающихся математических сюрпризов в эту прелестную книжку.

До сих пор я говорил о том, как эта книга соотносится с первой частью определения сюрприза – когнитивной рациональной реакцией на неожиданное. Что же до эмоционального аспекта, то эта книга – живая иллюстрация того, что многие математики называют основной причиной занятий математикой: это завораживает! Скажу больше: они утверждают, что математика стимулирует как интеллектуальную любознательность, так и чувство прекрасного и что решение задачи или понимание некоторой идеи несет духовную награду, которая побуждает и дальше посвящать свое время задачам и идеям.

Говорят, что цель вступительного слова – рассказать читателям, почему им стоит прочесть книгу. Я пытался это сделать, но полагаю, что ты, любезный читатель, дашь более полный ответ, когда прочтешь книгу и на собственном опыте прочувствуешь этимологию слова «сюрприз»: будешь захвачен ей!

Абрахам Аркави

Предисловие

Статья Годфрида Тусана о «складывающемся циркуле» [50] произвела на меня огромное впечатление. Мне никогда не приходило в голову, что современный циркуль с фрикционным сочленением – совсем не то, что использовалось во времена Евклида. В этой книге я представляю подборку математических результатов, которые не просто интересны, а еще и стали для меня сюрпризом.

Для чтения книги достаточно знания математики в объеме средней школы, но это не значит, что материал простой. Некоторые доказательства довольно длинные и требуют от читателя сильного желания разобраться в материале. Наградой станет понимание некоторых красивейших математических результатов. Это не учебник, потому что диапазон рассматриваемых тем настолько широк, что не укладывается в какой-то один учебный курс. Книга подойдет для математического кружка в школе, для семинаров в колледже и для учителей математики.

Главы можно читать в любом порядке (исключение составляет глава 10 об аксиомах оригами, которую следует прочитать раньше глав 11 и 12, также посвященных оригами). Замечания, относящиеся ко всем главам, приведены ниже в разделе «О стиле».

Что такое сюрприз?

У меня было три критерия включения темы в книгу.

- Теорема стала сюрпризом для меня. Особенно удивительными казались мне теоремы о возможности построения циркулем и линейкой. Чрезвычайно содержательная математика оригами вызвала чуть ли не шок: когда учительница математики предложила проект, связанный с оригами, я поначала отказался, т. к. думал, что в этом виде искусства не может быть никакой серьезной математики. Другие темы были включены, потому что хотя результат и был мне известен, его доказательство поражало элегантностью и доступностью. Особенно это касается чисто алгебраического доказательства возможности построения правильного семнадцатиугольника, которое было найдено Гауссом.
- Материал отсутствует в учебниках для средней школы и колледжа, сами теоремы и доказательства мне удалось найти только в продвинутых учебниках и в научной литературе. По большинству тем имеются статьи в Википедии, но надо знать, где искать, да и текст обычно содержит только факты без доказательства.
- Теоремы и доказательства доступны любому человеку, владеющему математикой в объеме средней школы.

Каждая глава завершается разделом «В чем сюрприз?», где объясняется, почему я включил эту тему.

Краткий обзор глав

В главе 1 приводится найденное Евклидом доказательство того, что любое построение, возможное с помощью фиксированного циркуля, возможно и с помощью складывающегося циркуля. Было предложено много доказательств этого факта, но, как показал Тусан, большинство из них некорректны, потому что опираются на рисунки, не всегда правильно отражающие геометрию. Дабы подчеркнуть, что не следует доверять рисункам, я привожу знаменитое «доказательство» того, что всякий треугольник равнобедренный.

На протяжении многих веков математики безуспешно пытались выполнить трисекцию произвольного угла (разделить его на три равные части) с помощью только циркуля и линейки. Андервуд Дадли внимательно изучил работы «трисекторов», открывавших неправильные построения; большая их часть – приближения, объявленные точными решениями. В начале главы 1 я привожу два таких построения и тригонометрические формулы, показывающие, что это всего лишь приближения. Для демонстрации того, что трисекция с помощью циркуля и линейки не имеет практического значения, показано, как можно выполнить трисекцию с помощью более сложных инструментов: *невсиса* Архимеда и *квадратрисы* Гиппия. Глава заканчивается доказательством невозможности трисекции произвольного угла с помощью циркуля и линейки.

Квадратуру круга (построить квадрат такой же площади, как у заданного круга) невозможно выполнить с помощью циркуля и линейки, потому что невозможно построить значение числа π. В главе 3 приведено три элегантных построения хороших приближений к π: одно принадлежит Кочански, а два других – Рамануджану. В конце главы показано, что квадратрису можно использовать для квадратуры круга.

Теорема о четырех красках утверждает, что любую карту на плоскости можно раскрасить четырьмя красками, так что никакие две страны, имеющие общую границу, не будут покрашены одним цветом. Доказательство этой теоремы очень сложное, но доказательство аналогичной теоремы о пяти красках элементарно и элегантно, что и показано в главе 4. Там же приведено рассуждение Перси Хивуда, показывающее, что «доказательство» теоремы о четырех красках Альфреда Кемпе некорректно.

Сколько охранников должен нанять музей, чтобы каждая стена находилась под постоянным наблюдением хотя бы одного охранника? В главе 5 приведено чрезвычайно остроумное решение этой, казалось бы, чисто геометрической задачи, основанное на раскраске графа.

В главе 6 представлено несколько малоизвестных результатов и их доказательства по индукции: теоремы о числах Фибоначчи и числах Ферма, 91-функция Маккарти и задача Иосифа Флавия.

В главе 7 обсуждается метод По-Шен Ло решения квадратных уравнений. Это важнейший элемент данного Гауссом алгебраического доказательства возможности построения правильного семнадцатиугольника (глава 16). В эту же главу включено геометрическое построение аль-Хорезми для нахождения корней квадратных уравнений и геометрическое построение, использованное Кардано при выводе формулы корней кубического уравнения.

Теория Рамсея – комбинаторная задача, являющаяся темой активных исследований. Она связана с поиском упорядоченных структур в подмножествах больших множеств. В главе 8 приведены простые примеры троек Шура, пифагоровых троек, чисел Рамсея и задачи ван дер Вардена. Доказательство теоремы о пифагоровых тройках недавно было получено с помощью компьютерной программы, основанной на математической логике. Глава завершается отступлением на тему известности пифагоровых троек древним вавилонянам.

К. Дадли Лэнгфорд, наблюдая, как сын возится с разноцветными кубиками, заметил, что он выстроил из них любопытную последовательность. В главе 9 излагается его теорема об условиях существования такой последовательности.

Глава 10 содержит семь аксиом оригами вкупе с детальными вычислениями аналитической геометрии этих аксиом и характеристикой сгибов как геометрических мест.

В главе 11 описан метод Эдуарда Лиля и фигура оригами, предложенная Маргеритой П. Белох. Метод Лилла я представляю как фокус-покус, поэтому не буду портить впечатление, приводя здесь детали.

В главе 12 показано, что в оригами возможны построения, недостижимые с помощью циркуля и линейки: трисекция угла, квадратура круга и построение правильного девятиугольника.

В главе 13 излагается теорема Георга Мора и Лоренцо Маскерони о том, что любое построение циркулем и линейкой можно выполнить с помощью одного лишь циркуля.

Одной линейки было бы недостаточно, потому что с ее помощью нельзя вычислить длины, являющиеся квадратными корнями. Жан-Виктор Понселе предположил, а Якоб Штейнер доказал, что линейки достаточно, при условии что где-то на плоскости имеется одна фиксированная окружность (глава 14).

Верно ли, что два треугольника с одинаковым периметром и одинаковой площадью обязательно конгруэнтны? На первый взгляд, правдоподобно. Но неверно, хотя для отыскания пары неконгруэнтных треугольников требуются алгебраические и геометрические выкладки (глава 15).

В главе 16 представлено чудо мастерства Гаусса: доказательство того, что правильный семнадцатиугольник можно построить с помощью циркуля и линейки. Применив остроумное рассуждение о симметрии корней многочленов, он вывел формулу, содержащую только четыре арифметических действия и квадратные корни. Гаусс не предъявил явного построения, поэтому я привожу элегантное построение Джеймса Каллаги. Глава завершается построениями правильного пятиугольника методом, который Гаусс применил для построения семнадцатиугольника.

Чтобы сделать книгу по возможности замкнутой, в приложении А собраны доказательства геометрических и тригонометрических теорем, которые могут быть неизвестны читателю.

О стиле

- Предполагается, что читатель хорошо знает математику в объеме программы средней школы, в т. ч.:
  - алгебра: многочлены и их деление, *приведенные* многочлены (коэффициент при старшем члене равен 1), квадратные уравнения, умножение степенных выражений: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
  - евклидова геометрия: конгруэнтные треугольники $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ и признаки конгруэнтности, подобные треугольники $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ и отношения их сторон, окружности, вписанные и центральные углы;
  - аналитическая геометрия: декартовы координаты, вычисление длин отрезков и углов наклона прямых, формула окружности;
  - тригонометрия: функции sin, cos, tg и преобразования между ними, углы в единичной окружности, тригонометрические функции дополнительных углов, например $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$.
- Все утверждения, нуждающиеся в доказательстве, называются *теоремами* без подразделения на теоремы, леммы и следствия.
- Если теорема следует за построением, то переменные, встречающиеся в теореме, относятся к помеченным точкам, линиям и углам на рисунке, сопровождающем построение.
- Полные имена математиков приводятся без биографических сведений, которые легко можно найти в Википедии.
- Я старался сделать книгу настолько независимой, насколько возможно, но иногда изложение опирается на продвинутые математические понятия и теоремы, которые приводятся без доказательства. В таких случаях краткая справка приводится во врезках, которые можно пропускать.
- В книге нет упражнений, но амбициозному читателю предлагается самостоятельно доказывать все теоремы, прежде чем читать доказательство.
- Геометрические построения можно изучать с помощью таких программ, как GeoGebra.
- $\overline{AB}$ обозначает как сам отрезок прямой, так и его длину.
- $\triangle ABC$ обозначает как сам треугольник, так и его площадь.

Глава 1

Складывающийся циркуль

Современный циркуль является *фиксированным*: расстояние между ножками можно зафиксировать, что позволяет скопировать отрезок прямой или окружность из одного места в другое (рис. 1.1a). Евклид же пользовался *складывающимся циркулем*, не позволяющим зафиксировать расстояние (рис. 1.1b). Преподаватели часто используют складывающийся циркуль, состоящий из какого-то маркера, привязанного к веревке; он позволяет нарисовать окружность на доске. Но стоит оторвать циркуль от доски, как возможность воспроизвести длину пропадает.

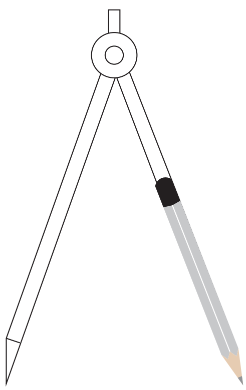

Рис. 1.1a ❖ Фиксированный циркуль. Одна ножка заканчивается иглой, помещаемой в центр окружности. К другой ножке прикреплен карандаш, рисующий окружность. Ножки соединены тугим шарниром, так что расстояние между их концами (радиус окружности) сохраняется даже после того, как циркуль оторван от бумаги

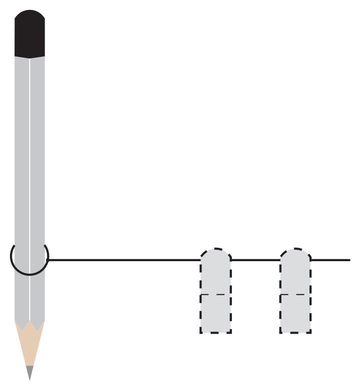

Рис. 1.1b ❖ Складывающийся циркуль. Пользователь держит один конец веревки в центре окружности. К другому концу прикреплен карандаш, которым рисуется окружность. Если оторвать циркуль от бумаги, то пальцы (изображены пунктиром) могут сдвинуться

Мы начнем эту главу с обсуждения того, зачем изучать построения циркулем и линейкой (раздел 1.1). В разделе 1.2 сравниваются два типа циркулей на примере самого простого построения: перпендикуляра, делящего отрезок пополам. В разделе 1.3 описан евклидов метод копирования отрезка с помощью складывающегося циркуля. Это доказывает, что любое построение, возможное с помощью фиксированного циркуля, можно выполнить и с помощью складывающегося циркуля. В разделе 1.4 приведено доказательство этой теоремы, на первый взгляд корректное, но работающее не для всех конфигураций точек и прямых. Чтобы дополнительно подчеркнуть, что рисункам доверять нельзя, в разделе 1.5 приведено знаменитое «доказательство» того, что любой треугольник равнобедренный; оно выглядит корректным, но таковым не является, потому что основано на неправильном рисунке.

1.1. Построение циркулем и линейкой

Раньше построения циркулем и линейкой были одной из фундаментальных концепций в курсе евклидовой геометрии. Но в последнее время они выпали из школьных программ. Безусловно, практического значения эта тема не имеет. Как будет показано в разделах 2.2, 2.3, 2.4, 3.4, еще греки знали, как с помощью лишь немного усовершенствованных инструментов выполнять построения, невозможные одними лишь циркулем и линейкой. В наше время компьютеры с помощью численных методов могут выполнять построения с любой точностью.

Тем не менее я полагаю, что изучение геометрических построений имеет ряд преимуществ:

- труднее, но интереснее изучать геометрию при помощи построений, а не просто читая теоремы и их доказательства;
- попытки найти нужное построение приводили к прорывным открытиям в математике. В главе 16 показано, что построение Гаусса заложило основы современной общей алгебры, в частности теории, разработанной Эваристом Галуа;
- в какой-то мере противоречит интуиции, а потому очень интересно существование доказательства того, что некоторые геометрические объекты построить невозможно;
- печально, но есть много людей, тратящих годы жизни в попытках выполнить невозможное построение. Учащиеся определенно должны знать о тщетности таких усилий.

1.2. Фиксированный и складывающийся циркули

В некоторых учебниках геометрии серединный перпендикуляр отрезка строится путем проведения двух окружностей с центрами в концах отрезка равных радиусов, которые должны быть *больше половины длины отрезка* (рис. 1.2a). Для этого нужен фиксированный циркуль, потому что после проведения окружности с центром в A расстояние между ножками циркуля не должно изменяться до проведения окружности с центром в B.

На рис. 1.2b показано построение серединного перпендикуляра с помощью фиксированного или складывающегося циркуля. Строятся две окружности: одна с центром в A радиусом $\overline{AB}$, а другая с центром в B радиусом $\overline{BA}$. Это можно сделать с помощью складывающегося циркуля, т. к. $\overline{AB} = \overline{BA}$ (это очевидно), поэтому циркулю не нужно «запоминать» длину $\overline{AB}$, чтобы построить окружность такого же радиуса с центром в B. Доказательство того, что прямая, показанная на рис. 1.2a, является серединным перпендикуляром, отнюдь не тривиально, оно опирается на такие продвинутые понятия, как конгруэнтность треугольников. Однако же доказательство правильности построения на рис. 1.2b просто и основывается на том факте, что треугольник $\triangle ABC$ равносторонний. На самом деле это первое предложение в «Началах» Евклида. $\overline{AC} = \overline{AB}$, потому что это радиусы одной и той же окружности, и точно так же $\overline{BC} = \overline{BA}$. Имеем: $\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BA} = \overline{BC}$.

На рис. 1.3a показано, что при построении с помощью фиксированного циркуля треугольник получается равнобедренным, но необязательно равносторонним (рис. 1.3b).

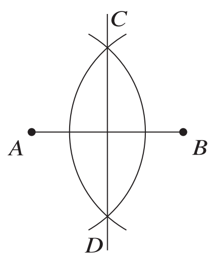

Рис. 1.2a ❖ Построение серединного перпендикуляра с помощью фиксированного циркуля

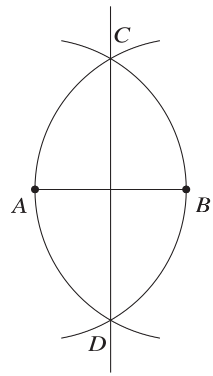

Рис. 1.2b ❖ Построение серединного перпендикуляра с помощью фиксированного или складывающегося циркуля

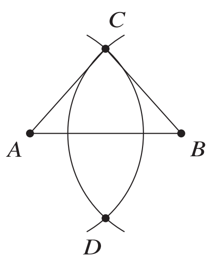

Рис. 1.3a ❖ Построение равнобедренного треугольника с помощью фиксированного циркуля

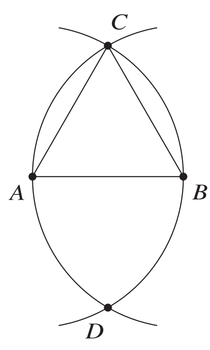

Рис. 1.3b ❖ Построение равностороннего треугольника с помощью складывающегося циркуля

1.3. Построение Евклида для копирования отрезка прямой

Второе предложение в «Началах» Евклида описывает, как получить копию заданного отрезка $\overline{AB}$, один из концов которого совпадает с заданной точкой C. Это означает, что фиксированный циркуль не дает никаких дополнительных возможностей и складывающегося циркуля достаточно, хотя построения получаются более сложными.

Теорема 1.1. *Пусть даны отрезок $\overline{AB}$ и точка C. Тогда с помощью складывающегося циркуля можно построить отрезок $\overline{CC'}$, один конец которого совпадает с точкой C и такой, что $\overline{AB} = \overline{CC'}$* (рис. 1.4a).

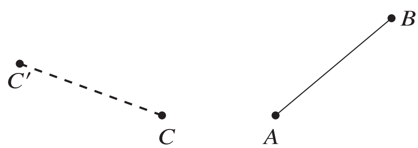

Рис. 1.4a ❖ Копирование отрезка $\overline{AB}$. Ориентация $\overline{CC'}$ не имеет значения

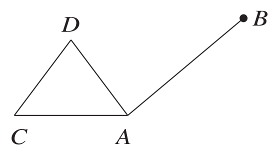

Рис. 1.4b ❖ Копирование отрезка с помощью складывающегося циркуля

Доказательство. Проведем отрезок $\overline{AC}$. Построим равносторонний $\triangle ACD$ на основании $\overline{AC}$ (рис. 1.4b). Согласно первому предложению Евклида, этот треугольник можно построить с помощью складывающегося циркуля. Продолжим отрезок, соединяющий *точку D с точкой A*, и отрезок, соединяющий *точку D с точкой C* (рис. 1.5a). Построим окружность с центром в A и радиусом $\overline{AB}$ и обозначим E пересечение этой окружности с лучом $\overline{DA}$ (рис. 1.5b). Построим окружность с центром в D и радиусом $\overline{DE}$ и обозначим F пересечение этой окружности с лучом $\overline{DC}$ (рис. 1.6).

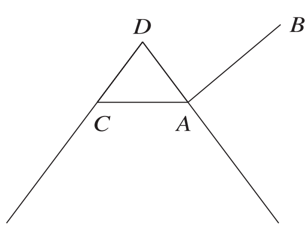

Рис. 1.5a ❖ Построение лучей, исходящих из D

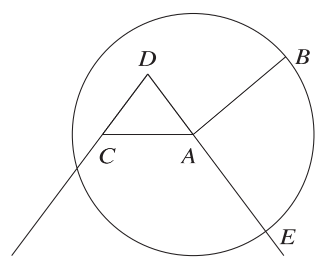

Рис. 1.5b ❖ Построение окружности радиуса $\overline{AB}$

$\overline{DC} = \overline{DA}$, потому что $\triangle ACD$ равносторонний. $\overline{AE} = \overline{AB}$ как радиусы одной окружности, и по той же причине $\overline{DF} = \overline{DE}$. Поэтому

$$\overline{CF} = \overline{DF} - \overline{DC} = \overline{DE} - \overline{DC} = \overline{DE} - \overline{DA} = \overline{AE} = \overline{AB}. \qquad \square$$

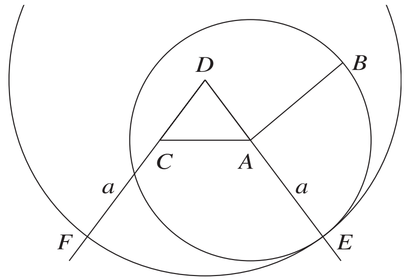

Рис. 1.6 ❖ Построение $\overline{CF} = \overline{AB}$

Направления лучей существенны. Приведенное доказательство проходит для любого отрезка $\overline{AB}$ и любой точки C, вне зависимости от их взаимного расположения. В силу сделанного выбора направлений «конус», ограниченный двумя лучами, пересекает окружности, даже если $\overline{AC} > \overline{AB}$ (рис. 1.7).

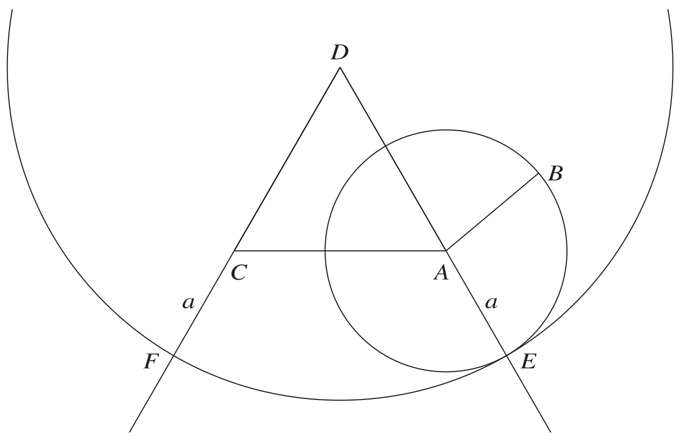

Рис. 1.7 ❖ Построение в случае $\overline{AC} > \overline{AB}$

1.4. Некорректное построение копии отрезка

Доказательство. Построим три окружности: с центром в A и радиусом $\overline{AB}$, с центром в A и радиусом $\overline{AC}$ и с центром в C и радиусом $\overline{AC} = \overline{CA}$. Обозначим пересечения окружностей с центрами в A и C соответственно E и F, а пересечение окружности с центрами в C и окружности с центром в A и радиусом $\overline{AB}$ обозначим D. На рис. 1.8 показано построение в случае, когда $\overline{AC} > \overline{AB}$.

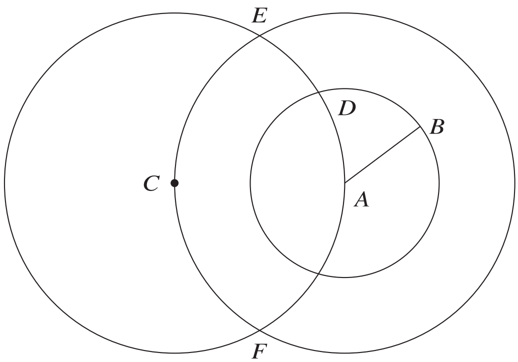

Рис. 1.8 ❖ Построение копии отрезка (1)

Построим окружность с центром в E и радиусом $\overline{ED}$. Обозначим G пересечение этой окружности и окружности с центром в A и радиусом $\overline{AC}$. Точки пересечения две, поэтому выберем ту, что ближе к C (рис. 1.9). $\overline{CD} = \overline{CE}$ как радиусы одной окружности, и точно так же $\overline{AE} = \overline{AG}$. По построению, радиусы $\overline{CE}$ и $\overline{AE}$ равны. Поэтому

$$\overline{CD} = \overline{CE} = \overline{AE} = \overline{AG}.$$

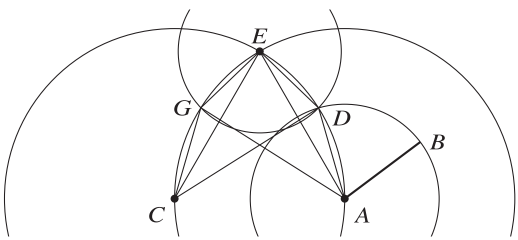

Рис. 1.9 ❖ Построение копии отрезка (2)

$\overline{EG} = \overline{ED}$ как радиусы одной окружности, поэтому $\triangle EAG \cong \triangle DCE$ по трем сторонам и $\angle GEA = \angle DEC$.

Поскольку

$$\angle GEC = \angle GEA - \angle CEA = \angle DEC - \angle CEA = \angle DEA,$$

то $\triangle ADE \cong \triangle CGE$ по двум сторонам и углу между ними. $\overline{AB} = \overline{AD}$ как радиусы меньшей окружности с центром в точке A, поэтому $\overline{GC} = \overline{AD} = \overline{AB}$. □

Доказательство корректно, только если $\overline{AC} > \overline{AB}$. На рис. 1.10 показано, что получается, когда $\overline{AC} < \overline{AB}$. Как видим, в этом случае $\overline{AB} \neq \overline{GC}$.

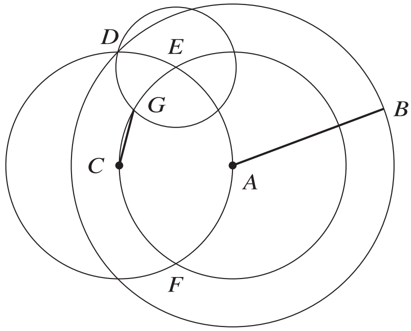

Рис. 1.10 ❖ Рисунок,
для которого доказательство не проходит

1.5. Не доверяйте рисункам

Теорема 1.2 (разумеется, неправильная). *Все треугольники равнобедренные.*

Доказательство (неверное). Пусть $\triangle ABC$ – произвольный треугольник и P – пересечение биссектрисы угла $\angle BAC$ и серединного перпендикуляра к отрезку $\overline{BC}$. Пересечения перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, обозначим соответственно E и F (рис. 1.11). $\triangle APE \cong \triangle APF$, потому что это прямоугольные треугольники с равными углами α и общей стороной $\overline{AP}$. $\triangle DPB \cong \triangle DPC$, потому что это прямоугольные треугольники, $\overline{PD}$ – общая сторона, а $\overline{BD} = \overline{CD} = a$. $\triangle EPB \cong \triangle FPC$, потому что это прямоугольные треугольники, $\overline{EP} = \overline{PF}$ в силу первой конгруэнтности, а $\overline{PB} = \overline{PC}$ в силу второй конгруэнтности. Объединяя эти равенства, получаем, что $\triangle ABC$ равнобедренный:

$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = \overline{AF} + \overline{FC} = \overline{AC}$. □

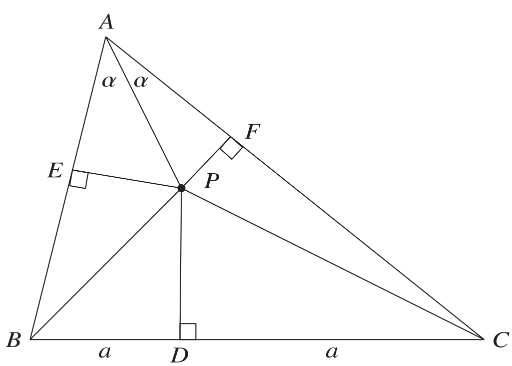

Рис. 1.11 ❖ Неверное доказательство того,
что все треугольники равнобедренные

Логика доказательства правильна, но рисунок, на котором оно основано, неверен, т. к. точка P на самом деле находится вне треугольника (рис. 1.12).

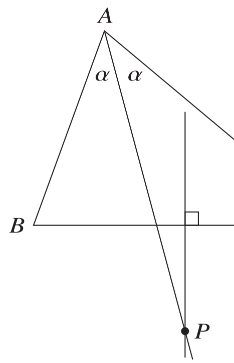

Рис. 1.12 ❖ Почему построение не работает

В чем сюрприз?

В школе я считал само собой разумеющимся, что у циркуля имеется тугой шарнир, позволяющий сохранить расстояние между иглой и карандашом даже после отрыва циркуля от бумаги. Когда учитель использовал циркуль, состоящий из веревки и кусочка мела, я даже не задумывался о том, что он отличается от моего. Статья Готфрида Тусана стала настоящим сюрпризом, как и его демонстрация некорректности доказательств, данных после Евклида, поскольку они зависели от рисунков, содержащих необоснованные предположения. Я рекомендую эту статью всем читателям, желающим углубить свое понимание доказательств в математике.

Источники

Эта глава основана на работе [50]. Некорректное построение, доказывающее эквивалентность обоих циркулей, в разделе 1.4 взято из работы [37]. Полный перевод «Начал» Евклида на русский язык с обширными комментариями осуществил Д. Д. Мордухай-Болтовский[1].

[1] Начала Евклида / пер. с греч. и комм. Д. Д. Мордухай-Болтовского; под ред. М. Я. Выгодского и И. Н. Веселовского. М.; Л.: ГИТТЛ, Т. 1. 1948; Т. 2. 1949.