С благоговейным трепетом и священным восторгом
мы посвящаем эту книгу

ПРИНЦИПУ НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

Автор приложил особые старания к тому, чтобы с как можно большей простотой и отчетливостью изложить руководящие идеи теории, придерживаясь в целом той их последовательности и связи, в какой они возникли в действительности. В интересах ясности я не останавливался перед частыми повторениями, нисколько не считаясь с изяществом изложения. Я добросовестно следовал предписанию гениального теоретика Л. Больцмана, рекомендовавшего заботу об изяществе представить портным и башмачникам.

А. Эйнштейн,
«*О специальной и общей теории относительности*»
(перев. с 12-го изд. под ред. проф. С. Я. Лифшица)

Содержание

Предисловие

> «Почти во всех учебниках, даже в лучших, этот принцип представлен так, что его нельзя понять» (Якоби К., *Лекции по динамике*, 1842–1843). Не решусь нарушать эту традицию.
>
> *В. И. Арнольд, «Математические методы классической механики»*. Наука, 1974, [5]

> Если вы не можете объяснить что-то просто, вы недостаточно хорошо это понимаете.
>
> *Альберт Эйнштейн*

Заметное возрождение интереса к классической теоретической механике, наблюдающееся в последние годы, связано с открытием глубинных, не предполагавшихся ранее слоев познания. Поведение классических[1] систем оказалось удивительно богато; вывод уравнений движения, находящийся в центре внимания традиционной механики, – это только начало. В классических механических системах был обнаружен сложный набор явлений, таких как нелинейные резонансы, хаотическое поведение и фазовые переходы к стохастическому поведению или хаосу.

В традиционных методах механики большая часть усилий сосредоточена на исследовании чрезвычайно узкого класса динамических систем, поведение которых поддается аналитическому описанию. Мы же будем изучать общие методы исследования поведения систем независимо от того, имеют описывающие их уравнения аналитическое решение или нет. Реальные динамические системы демонстрируют поведение, принципиально отличающее их от аналитически разрешимых систем, и это поведение бывает удивительно сложным. Мы намерены широко использовать компьютерное моделирование для изучения явлений движения.

Даже когда уравнения движения механической системы не допускают аналитического решения, инструменты современной динамики позволяют получить качественное понимание законов движения. Вместо того чтобы громоздить формулы, мы концентрируемся на геометрических особенностях набора возможных фазовых траекторий. Такие методы обеспечивают возможности для систематического анализа численных или экспериментальных данных.

Простота классической механики обманчива. Легко можно получить правильный ответ, даже используя ошибочные исходные предположения, без реального понимания сути задачи. Традиционная система математических обозначений подчас добавляет сложностей пониманию. Символические обо-

[1] То есть нерелятивистских. – *Прим. перев.*

значения имеют значения, которые зависят от контекста, а иногда меняют свое значение даже в пределах одной задачи[2]. Теоретическая механика основывается на уравнениях Лагранжа. В канонической форме уравнения Лагранжа имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Лагранжиан L здесь должен быть функцией обобщенных координат и скоростей q^i и $\dot{q}_i$, для того чтобы соответствующие частные производные были определены и существовали, однако чтобы производная по времени d/dt также была определена и существовала, в частные производные лагранжиана должны быть подставлены решения для траектории системы, дабы дифференцируемое выражение зависело только от времени. Традиционное использование неоднозначной нотации удобно в простых ситуациях, но в более сложных ситуациях может стать серьезным препятствием для четкого рассуждения. Чтобы выкладки были ясными и недвусмысленными, мы используем более точную математическую нотацию. Используемая нами нотация функциональна и соответствует современным математическим представлениям[3]. Ее подробное описание приведено в приложении.

Численные расчеты также необходимы для развития и реализации математических идей, лежащих в основе механики. Мы требуем, чтобы наши математические обозначения были настолько однозначными и точными, чтобы их можно было интерпретировать автоматически с помощью компьютера. Вследствие этого формулы и уравнения, которые появляются в тексте, существуют самостоятельно, имея четкое значение независимо от неформаль-

---

2 В своей книге по математической педагогике [17] Ганс Фрейденталь утверждает, что использование двусмысленных и неявных соглашений в таких выражениях, как $f(x)$ и $df(x)/dx$, делает понимание математики, и особенно вводный курс дифференциального и интегрального исчисления, чрезвычайно сложным для начинающих студентов. Он советует преподавателям математики по возможности использовать более формальную современную нотацию.

3 В своей прекрасной книге «Математический анализ на многообразиях» [40] Майкл Спивак использует операторную форму записи. На стр. 44 он обсуждает некоторые проблемы классической нотации. Мы приводим особенно пикантный отрывок: Простое выражение [для производной сложной функции] в классической системе обозначений требует введения не относящихся к делу символов. Обычно выражение для $D_1(f\circ(g, h))$ записывается следующим образом:
Если $f(u, v)$ – функция такая, что $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$, то:

$$\frac{\partial f(g(x,y),h(x,y))}{\partial x} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

[Здесь $\partial u/\partial x$ означает $\partial/\partial x\, f(x, y)$ и $\partial/\partial u\, f(u, v)$ означает $D_1 f(u, v) = D_1 f(g(x, y), h(x, y))$.] Обычно это уравнение записывается в упрощенной форме:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Обратите внимание, что f в правой и левой частях этого уравнения имеет разный смысл!

ного контекста. Например, в операторной форме мы записываем уравнения Лагранжа следующим образом[4]:

$$D(\partial_2 L \circ \Gamma[q]) - \partial_1 L \circ \Gamma[q] = 0.$$

Здесь лагранжиан L – вещественная функция времени t, обобщенных координат x и скоростей v – $L(t, x, v)$. Обозначение частных производных позиционное – то есть для идентификации переменной, по которой берется производная, используется ее позиция или номер порядкового положения в обозначении функции; таким образом, оператор $\partial_2 L$ определяет функцию, полученную путем взятия частной производной функции Лагранжа L по переменной скорости, находящейся во второй позиции. Традиционные способы записи с частными производными, когда используются явно выписанные производные по «переменным», могут зависеть от контекста, что может привести к двусмысленности[5]. Частные производные лагранжиана затем явным образом вычисляются вдоль пути q. Берется производная по времени, и получаются уравнения Лагранжа. На каждом шаге используются только явные методы, вся процедура вывода уравнений движения из лагранжиана свободна от «скрытых» подстановок.

Численные методы применяются для точного расчета динамики при анализе механических систем. Реализация методов вариационной механики на языке компьютеров заставляет их быть однозначными и вычислительно эффективными. Численные расчеты требуют от нас точности в представлении механических и геометрических понятий как объектов вычислений и позволяют явно составлять алгоритмы для манипулирования этими объектами. Кроме того, после формализации в виде процедуры математическая идея становится инструментом, который можно использовать непосредственно для получения результатов.

Активное участие в исследовании со стороны студента является неотъемлемой частью процесса обучения. Необходимо сосредоточиться на глубоком понимании движения систем; чтобы понять эволюцию динамических систем, студент должен активно исследовать их движение с помощью компьютерного моделирования и эксперимента. Упражнения и проекты являются неотъемлемой частью процесса обучения.

То, что математический формализм достаточно точен, чтобы его можно было интерпретировать автоматически, позволяет использовать компьютеры для активных исследований. Требование, чтобы компьютер мог интерпретировать любое выражение, обеспечивает строгую и немедленную обратную связь относительно того, правильно ли сформулировано выражение.

---

4 Здесь это уравнение приводится без пояснений, чтобы должным образом заинтриговать читателя. В основном тексте, разумеется, приведено подробное разъяснение.

5 Приходится пользоваться аппаратом частных производных, а это такой объект, в самом обозначении которого уже кроется двусмысленность (В. И. Арнольд, *«Математические методы классической механики»* [5], §47, с. 222. См. также сноску на этой странице).

Опыт показывает, что такое интерактивное взаимодействие с компьютером быстрее выявляет и исправляет многие недостатки в понимании.

В этой книге мы используем для написания программ Scheme – вариант языка программирования Lisp, который также применяется на вводном курсе информатики в Массачусетском технологическом институте. Существует много хороших описаний Scheme, здесь мы приводим только краткое введение в этот язык программирования в приложении.

Даже во вводном курсе информатики мы никогда специально не занимаемся изучением языка, потому что это не нужно. Мы просто начинаем использовать его, вначале в простых ситуациях, и студенты способны успешно программировать уже через несколько дней. Это одно из больших преимуществ Lisp-подобных языков: у них очень мало способов формирования сложных выражений и почти нет синтаксической структуры. Все формальные свойства могут быть изучены за час, как правила шахмат. Через некоторое время мы забываем о синтаксических деталях языка (потому что их нет) и переходим к реальным задачам – выясняем, что мы хотим вычислить.

Преимущество Scheme перед другими языками для расчетов в области классической механики заключается в том, что манипулирование процедурами, реализующими математические функции, в нем организуется проще и естественнее, чем в других компьютерных языках. Действительно, многие теоремы механики непосредственно представимы в виде программ на Scheme.

Версия Scheme, которая используется в этой книге, – вариант MIT/GNU, дополненный большой библиотекой программ под названием Scmutils, расширяющей операторы Scheme с целью сделать их универсально применимыми к различным математическим объектам, включая символические выражения. Библиотека Scmutils также обеспечивает поддержку численных методов, которые мы используем в этой книге, таких как интегрирование, решение систем дифференциальных уравнений и многопараметрическая оптимизация.

Система Scheme, дополненная библиотекой Scmutils, является свободным программным обеспечением. Мы предоставляем эту систему в комплекте с документацией и исходным кодом в форме, которую можно использовать с операционной системой GNU/Linux, в интернете по адресу mitpress.mit.edu/classical_mech.

В этой книге классическая механика представлена с необычной точки зрения. Изложение направлено на понимание динамики механических систем, а не на вывод уравнений движения. Мы вводим последние достижения в области нелинейной динамики на протяжении всего курса, а не только как запоздалое дополнение. Используя операторную математическую систему обозначений, мы облегчаем точное понимание фундаментальных свойств классической механики. Мы применяем численные вычисления для закрепления изученного материала, для формализации методов, для моделирования и для аналитических вычислений.

Эта книга является результатом преподавания классической теоретической механики в Массачусетском технологическом институте. Содержание ее стало результатом объединения курса лекций по нелинейной динамике и динамике Солнечной системы профессора Уиздома и дополнения к вводному курсу информатики Абельсона и Сассмана по использованию компьютерных вычислений для формализации теоретических методов. Приступая к работе, мы ожидали, что использовать этот подход для формализации теоретической механики будет легко. Но быстро поняли, что многие вещи, которые, как нам казалось, были нам понятны, на самом деле таковыми не являлись. Наше требование, чтобы математические обозначения были достаточно четкими и точными, чтобы их можно было интерпретировать автоматически, с помощью компьютера, оказалось очень эффективным для выявления неоднозначностей и неточностей в рассуждениях. В результате борьба за то, чтобы сделать математику точной и при этом ясной и вычислительно эффективной, продолжалась гораздо дольше, чем мы ожидали. Благодаря этой работе мы многое узнали как о механике, так и о компьютерных вычислениях. Мы надеемся, что другие, особенно наши конкуренты, воспользуются этими методами, чтобы наконец начать понимать ту науку, которой они занимаются, пусть даже и ценой замедления исследований.

Второе издание

Мы преподавали курс теоретической механики в Массачусетском технологическом институте, используя этот учебник в течение всего времени с момента публикации первого издания[6]. Мы выявили ряд трудностей, с которыми сталкивались студенты, изучая материал. Обнаружилось, что некоторые из наших объяснений нуждаются в улучшении. Это издание является результатом нашего нового, улучшенного понимания.

Программное обеспечение и наши вычислительные возможности совершили гигантский скачок вперед за эти годы, и мы использовали его для предоставления алгебраических доказательств большей общности, чем это могло быть сделано в первом издании. Это преимущество пронизывает большую часть нового издания.

В первой главе мы теперь переходим прямо к координатному представлению действия, не жертвуя важностью независимости действия от координат. Мы также добавили простой вывод уравнений Эйлера–Лагранжа из принципа наименьшего действия, дополнив более формальный вывод в первом издании. В главе о движении твердого тела мы теперь приводим алгебраический вывод существования вектора угловой скорости. Наш новый вывод согласован с использованием обобщенных координат твердого тела в качестве параметров преобразования из базовой к фактической ориентации системы координат. Мы также приводим новый раздел об использовании кватернионов, чтобы избежать сингулярностей при анализе движения твердых тел.

Каноническим называется такое преобразование координат фазового пространства и связанное с ним преобразование гамильтониана системы, кото-

---

[6] Первое издание вышло в 2001 году. – *Прим. перев.*

рое обеспечивает взаимно однозначное соответствие между траекториями. Хоть и ценой усложнения методов работы с каноническими преобразованиями, мы допускаем, что лагранжиан системы и сами преобразования могут зависеть от времени. Глава о канонических преобразованиях была тщательно пересмотрена, чтобы прояснить связь канонических преобразований с симплектическими преобразованиями. Мы выделили в новую главу раздел, посвященный каноническим преобразованиям в задачах эволюции, включая преобразования Ли.

Мы исправили множество мелких ошибок. Очень хочется надееться, что при этом мы не добавили их больше, чем удалили.

Глава 1

Механика Лагранжа

> Если я, без особого раздумья и не вдаваясь в подробные разъяснения, формулирую задачу механики таким образом: «механика имеет своей задачей описать, как с течением времени тела меняют свое место в пространстве», – то я рискую взять на свою душу несколько смертных грехов против святого духа ясности. Прежде всего надо вскрыть, в чем эти грехи заключаются.
>
> *А. Эйнштейн, «О специальной и общей теории относительности (общедоступное изложение)»* [16]

Предметом изучения в этой книге является движение твердых тел и математические инструменты, используемые для его описания.

Столетия тщательных наблюдений за планетами выявили ряд закономерностей в их движении и позволили научиться достаточно точно предсказывать такие явления, как затмения и соединения[1]. Попытка формально описать эти закономерности для предсказания движения небесных тел привела к развитию современной математики и открытию дифференциального исчисления как эффективного математического метода для описания реального физического мира. То, что математику можно использовать для описания природных явлений, уже само по себе явилось весьма примечательным фактом.

Булава, подброшенная жонглером, проходит предсказуемый путь и вращается предсказуемым образом. Само умение жонглировать в решающей степени зависит от этой предсказуемости. Самым замечательным стало открытие, что те же самые математические методы, которые используются для описания движения планет, могут быть использованы и для описания движения булавы в руках жонглера.

Классическая теоретическая механика описывает движение системы частиц под действием внешних сил. Сложные физические объекты, такие как булава жонглера, могут быть смоделированы как совокупность жестко свя-

---

[1] Соединение – в астрономии так называется расположение двух небесных тел на небесной сфере, при котором их эклиптические координаты близки или совпадают. Сами тела при этом могут быть сколь угодно далеки друг от друга в пространстве, просто для земного наблюдателя они находятся на одной линии наблюдения. – *Прим. перев.*

занных между собой мириад частиц с фиксированными пространственными связями между ними.

Можно представить себе множество возможных способов перемещения материальных тел динамической системы, которые в действительности никогда не происходят. Например, булава жонглера может зависнуть в воздухе или четырнадцать раз облететь вокруг его головы, прежде чем ее поймают, но в реальности такого не бывает. Как отличить движения системы, которые действительно происходят, от других геометрически возможных движений? Возможно, существует какая-то математическая функция, позволяющая отличить реализуемые движения от всех геометрически допустимых?

Движение системы можно описать, указав положение каждой части системы в каждый момент времени. Такое описание называется *конфигурационной траекторией* и определяет конфигурацию в виде функции от времени. Булава жонглера вращается во время полета; ее конфигурация определяется положением в пространстве и ориентацией. Движение булавы полностью определено, если ее положение и ориентация заданы в виде функции от времени.

Искомая функция, различающая траектории, принимает на входе траекторию системы и возвращает какой-то выход. Мы хотим, чтобы эта функция имела характерное поведение, когда на вход «подается» физически реализуемая траектория. Например, «выход» мог бы быть числом, и мы могли бы попытаться сделать так, чтобы это число было равно нулю только на реализуемых траекториях. Законы движения в механике имеют именно такую форму; в каждый момент времени должны выполняться дифференциальные уравнения Ньютона[2].

Однако существует альтернативная стратегия, которая обеспечивает лучшее постижение и большую предсказательную способность: мы могли бы искать функцию, различающую траектории, которая будет достигать локального минимума на реальных траекториях – на близлежащих физически невозможных траекториях значение этой функций будет большим, чем на реальной траектории. Это *вариационный метод*: для каждой физической системы мы вводим функцию различения траекторий, которая выделяет реализуемые движения системы, обладая стационарной точкой для каждой допустимой траектории[3]. В целях большей общности поиск реальных траекторий любой системы может быть описан с помощью вариационного принципа[4].

---

[2] Имеется в виду, что уравнения Ньютона выполняются строго локально, т. е. в окрестности точки, при этом из самих этих уравнений нельзя извлечь никакой общей информации о поведении системы. – *Прим. перев.*

[3] Стационарная точка функции – это точка, в которой вариация значения функции равна нулю при изменении входных данных. Локальные максимумы или минимумы являются стационарными точками.

[4] Вариационный принцип успешно описывает всю ньютонову механику частиц и твердых тел. Вариационный метод также был с пользой применен при описании многих других систем, как то: в классической электродинамике, гидродинамике невязких жидкостей и проектировании механизмов, например в задаче о четырехзвенном шарнире. Кроме того, современные формулировки квантовой механики и квантовой теории поля основаны на вариационном принципе. Однако, по-видимому, не все динамические системы могут быть описаны вариационным методом. Например, не существует простого способа применить аппарат вариационного исчисления к диссипативным системам, хотя в некоторых частных случаях вариационные методы все еще могут использоваться.

Уравнения механики, изобретенные Ньютоном и другими людьми его эпохи, описывают движение системы в терминах положений, скоростей и ускорений каждой из частиц в системе. Вариационная формулировка, в отличие от локальной ньютоновой формулировки механики в терминах дифференциалов, описывает движение системы в терминах интегральных величин, которые связаны с движением и положением системы как целого.

В ньютоновой формулировке силы, как правило, могут быть выражены как производные от потенциальной энергии системы. Движение системы определяется действием этих сил на составляющие ее части. Ньютонова формулировка уравнений движения по своей сути является описанием взаимодействий типа частица–частица.

В вариационной формулировке уравнения движения возникают как результат математического преобразования функции, равной разности кинетической и потенциальной энергий. Потенциальная энергия – это величина, характеризующая расположение частиц в системе; кинетическая энергия определяется скоростями частиц в системе. Ни потенциальная, ни кинетическая энергия не зависят от того, каким образом заданы эти положения и скорости. Их разница описывает всю систему как единое целое и не зависит от деталей того, какими параметрами эта система определена. Таким образом, мы свободны в выборе такого способа описания системы, с которым нам было бы легко работать; нет необходимости точно описывать взаимодействия между всеми частями системы, что присуще формулировке Ньютона.

Использование вариационного принципа дает множество преимуществ по сравнению с ньютоновой формулировкой законов движения. Процедура вывода уравнений движения для тех параметров, которые описывают поведение системы, не зависит от выбора этих параметров и от выбора системы координат. Если между частями системы существуют ограничения на перемещения (связи), ньютонова формулировка динамики требует введения дополнительных сил, создающих эти ограничения, тогда как в вариационной формулировке связи могут быть встроены в координаты. Вариационная формулировка явным образом вскрывает связь законов сохранения с симметриями[5]. Она обеспечивает определение конкретного движения системы в контексте всех возможных движений системы. Мы придерживаемся вариационной формулировки из-за этих преимуществ.

1.1. Конфигурационное пространство

Рассмотрим механические системы, предполагая их состоящими из точечных частиц, имеющих массу и положение, но не имеющих внутренней структуры[6]. Протяженные тела можно рассматривать как состоящие из большо-

---

[5] Теорема Нётер. – *Прим. перев.*

[6] Мы часто называем частицу без внутренней структуры, имеющую массу, точечной массой.

го числа таких точечных частиц с заданными пространственными связями между ними. Протяженные тела сохраняют свою форму из-за ограничений на пространственные перемещения между составляющими их частицами. Указание положения всех составляющих частиц системы определяет ее *конфигурацию*. Наличие связей – ограничений на перемещения частей системы, подобных тем, что определяют форму протяженного тела, – означает, что составляющие ее точечные массы не могут занимать все возможные положения в пространстве. Набор всех допустимых, с учетом связей, конфигураций называется *конфигурационным пространством* системы. *Размерность* конфигурационного пространства – это наименьшее количество параметров, которые должны быть заданы для полного указания положения всех частиц системы. Размерность конфигурационного пространства также называется *числом степеней свободы* системы[7].

Положение в пространстве одной свободной частицы, на движения которой не наложены ограничения, может быть описано тремя параметрами; точечная частица имеет трехмерное конфигурационное пространство. Если мы имеем дело с системой, состоящей из большего числа точечных частиц, конфигурационное пространство становится более сложным. Если существует k независимых частиц, нам нужно $3k$ параметров для описания возможных конфигураций. Если между частями системы существуют связи, размерность конфигурационного пространства уменьшается. Например, система в трехмерном пространстве, состоящая из двух точечных частиц, связанных так, что расстояние между ними остается неизменным, имеет пятимерное конфигурационное пространство: таким образом, с помощью трех чисел мы можем определить положение одной из частиц, а с помощью двух других параметров – задать положение второй частицы относительно первой.

Рассмотрим булаву жонглера. Безусловно, мы вполне можем задать конфигурацию булавы, если определим положение всех составляющих ее атомов. Однако существуют более экономичные описания конфигурации недеформируемых физических объектов. Если принять идеализированное допущение, что булава жонглера «абсолютно жесткая», то расстояния между всеми ее атомами остаются постоянными. Таким образом, мы можем указать направление главной оси булавы, указав положение одного атома и ее ориентацию в пространстве. Используя заданные связи, на основе этой информации можно определить положение всех остальных атомов булавы. Размерность

---

[7] Строго говоря, размерность конфигурационного пространства и число степеней свободы не совпадают. Число степеней свободы – это размерность «локально доступной» области конфигурационного пространства. Для систем с интегрируемыми связями это одно и то же. Для систем с неинтегрируемыми связями размерность конфигурационного пространства может быть больше, чем число степеней свободы. Дополнительные пояснения мы приведем в разделе 1.10.3, когда будем обсуждать системы с неинтегрируемыми связями. За исключением этого раздела, во всех рассматриваемых нами системах используются только интегрируемые связи (то есть они являются «голономными»). Вот почему мы решили размыть здесь различие между числом степеней свободы и размером конфигурационного пространства.

конфигурационного пространства булавы жонглера равна шести: минимальное количество параметров, определяющих положение одного из атомов в пространстве, равно трем, и минимальное количество параметров, определяющих ориентацию, также равно трем.

В то время как система совершает свою эволюцию со временем, составляющие ее частицы движутся в соответствии с наложенными на них ограничениями. Движение каждой составляющей частицы системы определяется математическим описанием изменяющейся конфигурации. Таким образом, движение системы можно описать как эволюцию по траектории в конфигурационном пространстве. Траектория в конфигурационном пространстве может быть задана функцией траектории системы, которая позволяет определить конфигурацию системы в любой момент времени.

Упражнение 1.1. Степени свободы

Для каждой из механических систем, описанных ниже, укажите число степеней свободы конфигурационного пространства.

a. Три булавы жонглера.

b. Сферический маятник, состоящий из точечной массы (груз маятника), подвешенной на жестком невесомом стержне, прикрепленном к неподвижной точке подвеса. Груз может двигаться под действием однородной силы тяжести в любом направлении, но с ограничениями, налагаемыми жестким стержнем.

c. Двойной сферический маятник, состоящий из одной точечной массы, подвешенной на жестком невесомом стержне, прикрепленном ко второй точечной массе, подвешенной на втором невесомом стержне, прикрепленном к неподвижной точке подвеса в поле однородной силы тяжести.

d. Точечная масса, скользящая без трения по жесткой изогнутой проволоке.

e. Жесткий осесимметричный волчок в поле однородной гравитационной силы, закрепленный на неподвижной опоре в одной точке, находящейся на оси симметрии.

f. То же самое, что **e**, но волчок не осесимметричный или точка закрепления не на оси симметрии.

1.2. Обобщенные координаты

Чтобы иметь возможность говорить о конкретной конфигурации системы, нам необходимо ввести набор однозначно определяющих ее параметров. Параметры, используемые для задания конфигурации системы, называются *обобщенными координатами*. Рассмотрим свободную частицу без ограничений и связей, которая, как мы уже установили, имеет три степени свободы. Конфигурация механической системы, состоящей из такой частицы, определяется путем указания ее положения в пространстве. Для этого потребуется три параметра, например можно указать ее прямоугольные координаты относительно некоторых координатных осей. Компоненты радиус-вектора частицы в декартовой системе координат являются в этом случае обобщенными координатами свободной частицы. Или рассмотрим идеальный двойной маятник в вертикальной плоскости: одна точечная масса связана с неподвижной точкой жестким нерастяжимым стержнем и соединена другим жестким нерастяжимым стержнем со второй точечной массой. Мы однозначно определим состояние этой системы, если будем знать ориентацию, то есть угол поворота каждого из двух стержней. Это означает, что для задания такой системы требуется по крайней мере два параметра; двойной маятник на плоскости имеет две степени свободы. Один из способов указать ориентацию стержня – задать угол, который он образует с вектором силы тяжести. Эти два угла являются обобщенными координатами для двойного маятника, совершающего колебания в одной плоскости.

Количество обобщенных координат необязательно должно совпадать с размерностью конфигурационного пространства, хотя их должно быть по меньшей мере столько же. Мы можем определить систему бóльшим числом обобщенных координат, чем это необходимо, но тогда нам придется наложить на эти координаты ограничения, чтобы решением задачи движения оказались только допустимые траектории.

Для плоского двойного маятника, описанного выше, достаточно двух угловых координат, чтобы указать конфигурацию. Однако мы могли бы взять в качестве обобщенных координат прямоугольные координаты каждой из масс в плоскости относительно некоторых выбранных координатных осей. Выбранные таким образом обобщенные координаты также точно описывают движение маятника, но мы должны будем явно ввести связи, которые ограничивают возможные конфигурации фактической геометрией системы. Использование обобщенных координат в том же числе, что и размерность конфигурационного пространства, облегчает исследование системы, потому что нам не нужно иметь дело с явными ограничениями на обобщенные координаты. Поэтому пока мы будем рассматривать только такие постановки задач, в которых количество обобщенных координат равно числу степеней свободы; позже мы узнаем, как обращаться с системами с избыточными координатами и явными ограничениями.

В общем случае обобщенные координаты образуют пространство M некоторой размерности n. Конфигурационное пространство размерности n можно параметризовать, выбрав функцию координат χ, которая ставит в соответствие элементам конфигурационного пространства наборы из n действительных чисел – n-кортежи[8]. В случае более чем одного измерения функция χ представляет собой кортеж из n независимых координатных функций[9] χ^i, $i = 0,1, \ldots, n - 1$, где каждая из функций χ^i является вещественной функцией, определенной в некоторой области конфигурационного

8 Кортежем называется упорядоченный набор элементов, принадлежащих одному множеству. Каждый элемент кортежа, в свою очередь, может быть кортежем.

9 Кортеж из функций, принадлежащих одному множеству, сам по себе является функцией в этом множестве: для заданной точки множества значение кортежа функций является кортежем значений функций компонентов кортежа в этой точке.

пространства[10]. Для заданного состояния (или конфигурации)[11] системы m в конфигурационном пространстве M значения $\chi^i(m)$ координатных функций являются его обобщенными координатами. Эти обобщенные координаты позволяют установить соответствие между точками n-мерного конфигурационного пространства и n-кортежами действительных чисел[12]. Для любого заданного конфигурационного пространства существует множество способов выбора обобщенных координат. Даже для одной свободно движущейся материальной точки мы можем выбирать прямоугольные координаты, полярные координаты или любую другую систему координат, которая нам нравится или наилучшим образом отражает геометрические особенности задачи.

Движение системы может быть описано траекторией в конфигурационном пространстве. Траектория системы представляет собой отображение времени в точки конфигурационного пространства. Траектории в конфигурационном пространстве соответствует *траектория в координатном пространстве* $q = \chi \circ \gamma$, представляющая собой отображение времени в кортежи обобщенных координат[13]. Если существует более одной степени свободы, то траектория в координатном пространстве является структурным объектом: q – кортеж функций компонент координат $q^i = \chi^i \circ \gamma$. В каждый момент времени t значения $q(t) = (q^0(t), \ldots, q^{n-1}(t))$ являются обобщенными координатами состояния системы.

Производная Dq от обобщенной координаты пути q является функцией[14], которая определяет скорость изменения координат в данный момент времени: $Dq(t) = (Dq^0(t), \ldots, Dq^{n-1}(t))$. Скорость изменения обобщенной координаты называется *обобщенной скоростью*.

---

[10] Использование верхних индексов для обозначения компонентов координат является достаточно традиционным, хотя и существует потенциальный риск путаницы с показателями степени. Нумерация индексов начинается с нуля.

[11] Здесь следует сделать замечание: авторы повсеместно используют термин «конфигурация» для обозначения положения системы в конфигурационном пространстве и в то же время для состояния динамической системы, т. е. конкретного набора обобщенных координат ее. В русском языке более традиционно использование терминов «состояние» или «положение», например в таком сочетании: «… положение системы в фазовом пространстве…». Можно было бы сохранить традиционный для русских книг по теоретической механике терминологический словарь, но, с другой стороны, «конфигурация» используется и у нас, поэтому в основном в книге сохранен именно этот термин. – *Прим. перев.*

[12] Точнее, обобщенные координаты устанавливают соответствие открытых подмножеств конфигурационного пространства с открытыми подмножествами R^n. Для покрытия всего конфигурационного пространства может потребоваться более одного набора обобщенных координат. Например, если конфигурационное пространство представляет собой двумерную сферу, у нас может быть один набор координат, который отображает северное полушарие на диск, и другой набор, который отображает южное полушарие на диск, с полосой вблизи экватора, общей для обеих этих систем координат. Пространство, которое может быть локально определено гладкими координатными функциями, называется *дифференцируемым многообразием*.

[13] Здесь символ $\circ$ обозначает композицию функций: $(f \circ g)(t) = f(g(t))$.

[14] Производная функции f – это тоже функция, обозначаемая Df. В нашей нотации оператор D имеет наивысший приоритет; таким образом, D действует на функцию до того, как будет получено значение самой функции: $Df(x)$ равно $(Df)(x)$.