ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов,
Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов

АЛГЕБРА

ОСНОВНОЙ КУРС
с решениями и указаниями

Учебно-методическое пособие

Под редакцией
М. В. Федотова

Москва
Лаборатория знаний

Оглавление

От редактора

Уважаемый читатель, Вы держите в руках одну из книг серии «ВМК МГУ – школе». Учебно-методические пособия, входящие в эту серию, являются результатом более чем десятилетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета Вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова. Сначала были созданы пособия для очных подготовительных курсов, затем были разработаны электронные версии учебников, используемые при дистанционном обучении. На основе этого опыта подготовлена серия книг для старшеклассников, одной из которых и является настоящее пособие.

Сейчас изданы пособия по алгебре, геометрии и физике. По каждому предмету вышли два пособия: основной курс и углубленный курс, содержащий сложные задачи единого государственного экзамена и нестандартные задачи вступительных экзаменов в вузы (в основном это задачи различных факультетов МГУ имени М. В. Ломоносова). Основной курс содержит все разделы соответствующего предмета, необходимые для решения задач первой части ЕГЭ и некоторых задач второй части, а также первой половины задач вариантов вступительных экзаменов в вузы. Углубленный курс содержит задачи, научившись решать которые, вы сможете решать все задачи ЕГЭ и все или почти все задачи олимпиад и вступительных экзаменов в вузы (за отведённое время можно просто физически не успеть решить все задачи).

В серии «ВМК МГУ – школе» вышли два пособия по информатике. Первое рекомендуется в качестве пособия при подготовке к ЕГЭ по информатике и ИКТ. Разделы этого пособия соответствуют темам, включенным в ЕГЭ. Второе – пособие по программированию – поможет вам подготовиться к экзамену по информатике, научиться решать задачи по программированию на языке Паскаль.

Отличительной особенностью наших пособий является то, что наряду с традиционными составляющими (теоретический раздел, примеры с решениями, задачи для самостоятельного решения) мы предлагаем **решения** всех предложенных задач **с идеями** и последовательными **подсказками**, помогающими решить задачу оптимальным способом без посторонней помощи. Это позволит ученику самостоятельно продвигаться в решении задачи так, как если бы за его спиной стоял учитель и направлял ход его мысли при решении трудных задач. Конечно, мы понимаем, что настоящего учителя не может заменить никакая книга, но если учителя рядом нет, то, как показал опыт наших дистанционных подготовительных курсов, наличие грамотных подсказок помогает учащимся самостоятельно научиться решать задачи. С помощью нашего пособия приобретение такого опыта учениками будет значительно облегчено. С другой стороны, наши пособия помогут молодым учителям вести занятия. Мы знаем на собственном опыте, что не всегда легко направлять ученика так, чтобы он сам догадался, как решить задачу. **Второй особенностью** наших пособий является **спиралевидная схема подачи материала**, когда каждая тема повторяется несколько раз, причём каждый раз на более сложном уровне, чем в предыдущий. Это позволяет не забывать пройденный материал и постепенно подходить к сложным задачам.

Заместитель декана по учебной работе
факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова
М. В. Федотов

Предисловие

До 2017 года «основной курс» назывался «базовым курсом», но в связи с разделением ЕГЭ на базовый и профильный уровни, во избежание путаницы наш «базовый курс» был переименован в «основной курс».

«Основной курс» рассчитан на закрепление школьного материала по алгебре и приобретение навыков, необходимых для решения задач ЕГЭ и стандартных задач вступительных экзаменов в вуз.

Предлагаемый курс изначально не предполагает знаний, выходящих за рамки базовой школьной программы. Все приёмы, необходимые для решения задач, демонстрируются по ходу изучения материала.

Задачи в разделах расположены по принципу «*от простого – к сложному*». Аналогичная ситуация имеет место и с последовательностью разделов, поэтому сами разделы и задачи в разделах рекомендуется изучать в предложенном порядке. Приступать к решению задач надо после изучения соответствующего теоретического материала и разбора примеров. Если самостоятельное решение задачи вызывает трудности, рекомендуется воспользоваться системой указаний (подсказок). В случае, если Вам не удалось получить правильный ответ или у Вас возникли сомнения в правильности Вашего решения, рекомендуется изучить решение, предложенное авторами.

При составлении пособия авторы придерживались спиралевидного принципа подачи материала: сначала предлагаются простые задачи по всем основным разделам математики и методы их решения, затем рассматриваются более сложные задачи, для решения которых требуются более сложные методы или их комбинации. Это позволяет не только закрепить, но и осмыслить на новом уровне уже пройденный материал. Такая схема обучения с успехом применяется на очных и дистанционных подготовительных курсах факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова.

Каждый раздел пособия содержит теоретические основы, описание методов решения задач, примеры применения методов и набор заданий для решения.

Запись (У) после номера задачи означает, что задача предлагалась на устном экзамене по математике в МГУ.

Для задач письменного экзамена сначала идет сокращенное название факультета, затем – год, в котором была задача (если после года в скобках идет цифра 1 или 2 – это значит, что эта задача была на весенней олимпиаде факультета; на мехмате и физфаке весной проходили две олимпиады; на ВМК, геологическом, химическом, географическом факультетах и факультете почвоведения – одна олимпиада весной). После точки идет номер задачи в варианте (обычно, чем больше номер, тем сложнее задача в данном варианте). Например, (ВМК-98.3) означает, что задача была в 1998 году летом на вступительных экзаменах на факультете ВМК, третьим номером в варианте, а (М/м-97(2).1) означает, что задача была в 1997 году на второй весенней олимпиаде механико-математического факультета первым номером в варианте.

Сокращения названий факультетов, принятые в данной книге

М/м – механико-математический факультет,
ВМК – факультет Вычислительной математики и кибернетики (.Б – отделение бакалавров по прикладной математике, .И – отделение бакалавров по информационным технологиям),
Физ – физический факультет,
Хим – химический факультет,
ВКНМ – Высший колледж наук о материалах,
ФНМ – факультет наук о материалах (до 2000 года – ВКНМ)
Биол – биологический факультет,
Почв – факультет почвоведения,
Геол – геологический факультет (.ОГ – отделение общей геологии),
Геогр – географический факультет,
Экон – экономический факультет (.М – отделение менеджмента, .К – отделение экономической кибернетики, .В – вечернее отделение),
ВШБ – Высшая школа бизнеса,
Псих – факультет психологии,
Фил – философский факультет,
Филол – филологический факультет,
Соц – социологический факультет,
ИСАА – Институт стран Азии и Африки,
ФГУ – факультет государственного управления (отделение «Антикризисное управление»),
ЧФ – Черноморский филиал МГУ (г. Севастополь).

Используемые обозначения

$\{a\}$ – множество, состоящее из одного элемента a;
$\cup$ – объединение; $\cap$ – пересечение; $\emptyset$ – пустое множество;
$\in$ – знак принадлежности; $\subset$ – знак включения подмножества;
$\forall$ – для любого; $A\backslash B$ – разность множеств A и B;
$\Longrightarrow$ – следовательно; $\Longleftrightarrow$ – тогда и только тогда;
$\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
$\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел;
$\mathbb{Q}$ – множество всех рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ – множество всех действительных чисел;
ОДЗ – область допустимых значений;

$\left\{\begin{array}{l} \ldots \\ \ldots \end{array}\right.$ – знак системы, означающий, что должны выполняться все условия, объединённые этим знаком;

$\left[\begin{array}{l} \ldots \\ \ldots \end{array}\right.$ – знак совокупности, означающий, что должно выполняться хотя бы одно из условий, объединённых этим знаком.

Рекомендуется школьникам при подготовке к сдаче единого государственного экзамена, абитуриентам при подготовке к поступлению как в МГУ, так и другие вузы, учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

Желаем удачи!

Часть I. Теория и задачи

1. Преобразование алгебраических выражений, простейшие уравнения и неравенства

1.1. Формулы сокращённого умножения, преобразование алгебраических выражений

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи, при решении которых используются различные полезные формулы и преобразования: формулы сокращённого умножения, выделение полного квадрата, домножение на сопряжённое выражение.

Необходимо знать и уметь применять следующие формулы:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b); \tag{1}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \tag{2}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \tag{3}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2); \tag{4}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2); \tag{5}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \tag{6}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3; \tag{7}$$

причём все формулы нужно узнавать не только «слева направо», но и «справа налево».

Применение формул сокращённого умножения является одним из самых простых способов разложения алгебраического выражения на множители. Все формулы справедливы при любых вещественных a и b, которые сами могут являться числами, функциями или другими выражениями.

Помимо основных формул сокращённого умножения полезно знать и формулы для большего числа слагаемых, например:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$$

В общем случае: квадрат суммы нескольких чисел есть сумма квадратов этих чисел плюс сумма всевозможных удвоенных попарных произведений.

Полезно знать также две следующие формулы, верные $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1});$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - ... - ab^{2n-1} + b^{2n}).$$

Примеры решения задач

Пример 1. (Геол-98.1) Найти численное значение выражения

$$\left(\frac{9a^2-16b^2}{4b+3a} - \frac{a^2b-3ab^2}{ab}\right)^2 : \left(6ab - \frac{8a^3-b^3}{2a-b}\right).$$

Решение. Согласно формулам (1) и (5)

$$9a^2 - 16b^2 = (3a-4b)(3a+4b), \quad 8a^3 - b^3 = (2a-b)(4a^2+2ab+b^2).$$

Последовательно преобразуем исходное выражение:

$$\left(\frac{(3a-4b)(3a+4b)}{4b+3a} - \frac{ab(a-3b)}{ab}\right)^2 : \left(6ab - \frac{(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)}{2a-b}\right) =$$

$$= (3a-4b-a+3b)^2 : (6ab-4a^2-2ab-b^2) = (2a-b)^2 : (4a^2-4ab+b^2)\cdot(-1) = -1.$$

Отметим, что выражение имеет смысл только при $4b+3a \neq 0$, $ab \neq 0$, $2a \neq b$.

Ответ. -1 при $4b+3a \neq 0$, $ab \neq 0$, $2a \neq b$.

Пример 2. (М/м-78.1) Выражение $\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|} - \sqrt{40\sqrt{2}+57}$ является целым числом. Найти это целое число.

Решение. *Первый способ.* Выделим полные квадраты в подкоренных выражениях:

$$\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|} - \sqrt{40\sqrt{2}+57} = \sqrt{57-40\sqrt{2}} - \sqrt{40\sqrt{2}+57} =$$

$$= \sqrt{32 - 2\cdot 4\sqrt{2}\cdot 5 + 25} - \sqrt{32 + 2\cdot 4\sqrt{2}\cdot 5 + 25} = \sqrt{\left(4\sqrt{2}-5\right)^2} - \sqrt{\left(4\sqrt{2}+5\right)^2} =$$

$$= \left|4\sqrt{2}-5\right| - \left(4\sqrt{2}+5\right) = 4\sqrt{2} - 5 - 4\sqrt{2} - 5 = -10.$$

Замечание. Коэффициенты полных квадратов можно найти методом неопределённых коэффициентов (ищем $a, b \in \mathbb{N}$):

$$57 + 40\sqrt{2} = \left(a + b\sqrt{2}\right)^2 = \left(a^2 + 2b^2\right) + 2ab\sqrt{2}.$$

Получаем систему уравнений $\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 57, \\ ab = 20; \end{cases}$ значит, $b \in \{1; 2; 4; 5\}$, число a – нечётное. Подходит пара $a = 5$, $b = 4$; следовательно, $57 + 40\sqrt{2} = \left(5 + 4\sqrt{2}\right)^2$.

Аналогично $57 - 40\sqrt{2} = \left(5 - 4\sqrt{2}\right)^2$.

Второй способ. Примем числовое значение выражения за параметр и решим соответствующее уравнение.

Обозначим за A выражение $\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$; тогда $A<0$, так как первый радикал меньше второго.

Возведём обе части в квадрат:

$$A^2=57-40\sqrt{2}+57+40\sqrt{2}-2\sqrt{\left(57-40\sqrt{2}\right)\cdot\left(57+40\sqrt{2}\right)}\iff$$

$$\iff\quad A^2=114-2\sqrt{57^2-1600\cdot 2}\quad\iff\quad A^2=100\quad\iff\quad A=\pm 10.$$

Значит, $A=-10$.

О т в е т. -10.

Задачи

1. (ЕГЭ) Найти значение выражения $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+ab}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right):\sqrt{\dfrac{a}{a+b}}$ при $a=4$, $b=5$.

2. (ЕГЭ) Найти значение выражения $\dfrac{2}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}-\dfrac{2\sqrt{p}}{p-q}$ при $p=8$, $q=9$.

3. (ЕГЭ) Сократить дробь $\dfrac{a-81b}{\sqrt{a}-9\sqrt{b}}$.

4. (ЕГЭ) Сократить дробь $\dfrac{a+27b}{\sqrt[3]{a}+3\sqrt[3]{b}}$.

5. (Геол-93.1) Найти численное значение выражения
$$\left(\frac{8a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{4\sqrt{a}+2\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{4\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{4a-b}\right)^2.$$

6. (Почв-98(1).1) Упростить выражение
$$\left(\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}{\sqrt{2a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{4a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right).$$

7. (Псих-84.1) Вычислить, не используя калькулятор
$$\left(\frac{3(\frac{17}{90}-0,125:1\frac{1}{8}):480}{(7:1,8-2\frac{1}{3}:1,5):2\frac{2}{3}}\right)^{-1}:\left(\frac{679\cdot 10^{-2}}{0,7}+0,3\right).$$

8. (ЕГЭ) Вычислить $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

9. (ЕГЭ) Выражение $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ является целым числом. Найти его.

10. (Почв-96.1) Доказать, что число $\left(\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}\right)^2+7\right)\cdot\left(\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{27}\right)^2-7\right)$ целое, и найти его.

11. (ЕГЭ) Упростите до целого числа выражение $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}-\sqrt{3}$.

12. (МГУ-48.3) Выражение $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ является целым числом. Найти это целое число.

13. (МГУ-48.2) Выражение $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ является целым числом. Найти это целое число.

14. (ИСАА-99.2) Упростив выражение $A=\dfrac{3ab-b\sqrt{ab}+a\sqrt{ab}-3b^2}{\sqrt{2^{-2}\left(ab^{-1}+a^{-1}b\right)-0,5}}-2ab-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$, где $a>b>0$ – действительные числа, выяснить, что больше: A или $0,01$?

1.2. Сравнение чисел

Теоретический материал

В этом разделе собраны простейшие задачи на сравнение чисел. В большинстве случаев достаточно сгруппировать подходящим образом слагаемые и возвести обе части неравенства в нужную степень. При этом в чётную степень можно возводить только неотрицательные величины.

Примеры решения задач

Пример 1. (У) Доказать, что $\sqrt{2}+\sqrt{3}<\sqrt{10}$.

Решение. Для того чтобы избавиться от квадратных корней, будем возводить в квадрат. Так как обе части исходного неравенства неотрицательны, то можем возвести их в квадрат:

$$5+2\sqrt{6}<10 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\sqrt{6}<5.$$

Возведя обе части последнего неравенства в квадрат, получим очевидное неравенство $24<25$. Следовательно, исходное неравенство также справедливо.

Пример 2. (У) Выяснить, что больше: $\sqrt[3]{3}$ или $\sqrt[5]{5}$?

Решение. Составим формальное неравенство

$$\sqrt[3]{3} \vee \sqrt[5]{5}$$

и будем сводить его к очевидному неравенству с помощью алгебраических преобразований. Для того чтобы избавиться от радикалов, надо возвести обе части неравенства в пятнадцатую степень:

$$\begin{array}{ccc} \left(\sqrt[3]{3}\right)^{15} & \bigvee & \left(\sqrt[5]{5}\right)^{15} \\ 3^5 & \vee & 5^3 \\ 243 & > & 125. \end{array}$$

Поскольку не было преобразований, меняющих знак неравенства, полученный знак соответствует исходному, то есть $\sqrt[3]{3}>\sqrt[5]{5}$.

Ответ. $\sqrt[3]{3}>\sqrt[5]{5}$.

Пример 3. (Экон-88.1) Какое из двух чисел больше: $\sqrt[3]{4}+\sqrt{2}$ или 3?

Решение. Составим формальное неравенство

$$\sqrt[3]{4}+\sqrt{2} \ \vee \ 3$$

и будем работать с ним как с обычным, исключив преобразования, меняющие его знак. Возведём обе части неравенства $\sqrt[3]{4} \vee 3-\sqrt{2}$ в куб:

$$\begin{aligned} 4 \quad &\vee \quad (3-\sqrt{2})^3 = 45-29\sqrt{2} \\ 29\sqrt{2} \quad &\vee \quad 41. \end{aligned}$$

Теперь возведём обе части неравенства в квадрат и получим $1682>1681$; так как не было преобразований, меняющих знак неравенства, полученный знак соответствует исходному, то есть $\sqrt[3]{4}+\sqrt{2}>3$.

Ответ. Первое число больше.

Задачи

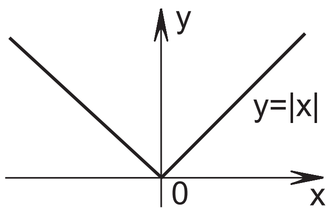
1. (ВМК-92.1) Какое из двух чисел $\sqrt[3]{\dfrac{1990}{1991}}$ или $\sqrt[3]{\dfrac{1991}{1992}}$ больше?
2. (Геол-94(1).1) Какое из двух чисел меньше: $\sqrt[3]{47}$ или $\sqrt{13}$?
3. (Геол-82.1) Какое из следующих чисел больше: $\sqrt{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}-2\sin\dfrac{3\pi}{2}}$ или $\sqrt[3]{5}$?
4. (У) Сравнить числа: 3^{400} и 4^{300}.
5. (У) Сравнить числа: $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ и $\sqrt{3}+\sqrt{19}$.
6. (ЕГЭ) Сравнить $\sqrt{2004}+\sqrt{2007}$ и $\sqrt{2005}+\sqrt{2006}$.
7. (У) Сравнить числа: $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}$ и $\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\dfrac{11}{1000}$.
8. (У) Выяснить, что больше: 33^{44} или 44^{33}?
9. (У) Сравнить числа: π и $\sqrt{10}$.
10. (У) Сравнить числа: $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{1/6}$ и $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{1/5}$.

1.3. Модуль числа и алгебраического выражения, уравнения и неравенства с модулем

Теоретический материал

Определим *модуль* (абсолютную величину) вещественного числа x следующим образом:

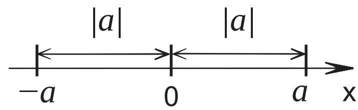
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$



Функция $y = |x|$ является чётной и неотрицательной на всей числовой оси.

Геометрическим смыслом модуля числа считается расстояние по числовой оси от начала отсчёта до рассматриваемого числа, причём одному и тому же значению $|a|$ соответствуют две симметричные относительно начала отсчёта точки: a и $-a$ соответственно.

Для преобразований выражений с модулями, а также для решения уравнений и неравенств, содержащих функции неизвестных величин под знаком модуля, рассматривают варианты раскрытия модулей в зависимости от знака подмодульного выражения. Например:



$$|f(x)| = g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ f(x) < 0; \end{cases} \end{array}\right. \tag{8}$$

$$|f(x)| > g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) > g(x), \\ f(x) < 0; \end{cases} \end{array}\right. \tag{9}$$

$$|f(x)| < g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) < g(x), \\ f(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{10}$$

В случае нестрогих неравенств с модулем неравенства равносильных систем также становятся нестрогими. Кроме того, принципиальной разницы в приписывании случая $f(x) = 0$ к любой из получаемых систем (или даже к обеим сразу) нет.

Иногда бывает удобно раскрывать модули через геометрический смысл. Например, при положительном a

$$|f(x)| = a \iff f(x) = \pm a; \tag{11}$$

$$|f(x)| < a \iff -a < f(x) < a; \tag{12}$$

$$|f(x)| > a \iff \left[\begin{array}{l} f(x) > a; \\ f(x) < -a. \end{array}\right. \tag{13}$$

Примеры решения задач

П р и м е р 1. (Физ-95.3) Решить уравнение $2|x+1| = 2-x$.

Р е ш е н и е. Подмодульное выражение меняет знак в точке $x=-1$. Рассмотрим два случая.

1) При $x \geq -1$ исходное уравнение примет вид

$$2(x+1) = 2-x \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$$

Так как найденный корень удовлетворяет условию $x \geq -1$, то $x = 0$ является решением исходного уравнения.

2) При $x < -1$ уравнение запишется в виде

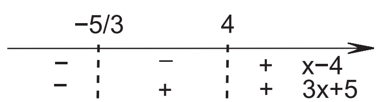
$$-2(x+1) = 2-x \quad \Longleftrightarrow \quad x = -4.$$

Найденный корень удовлетворяет условию $x < -1$, следовательно, также является решением исходного уравнения.

О т в е т. -4; 0.

П р и м е р 2. (Экон-84.3) Решить неравенство $2|x-4| + |3x+5| \geq 16$.

Р е ш е н и е. Отметим нули подмодульных выражений на числовой прямой и проанализируем знаки подмодульных выражений.



1) При $x < -\dfrac{5}{3}$ оба подмодульных выражения отрицательны, следовательно,

$$\begin{cases} x < -\dfrac{5}{3}, \\ -2(x-4) - (3x+5) \geq 16; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x < -\dfrac{5}{3}, \\ x \leq -\dfrac{13}{5}; \end{cases} \Longleftrightarrow \quad x \in \left(-\infty; -\frac{13}{5}\right].$$

2) При $-\dfrac{5}{3} \leq x < 4$ исходное неравенство примет вид

$$\begin{cases} -\dfrac{5}{3} \leq x < 4, \\ -2(x-4) + (3x+5) \geq 16; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{5}{3} \leq x < 4, \\ x \geq 3; \end{cases} \Longleftrightarrow \quad x \in [3; 4).$$

3) При $x \geq 4$ получим

$$\begin{cases} x \geq 4, \\ 2(x-4) + (3x+5) \geq 16; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq 4, \\ x \geq \dfrac{19}{5}; \end{cases} \Longleftrightarrow \quad x \in [4; +\infty).$$

Объединив все три полученных промежутка, получим ответ.

О т в е т. $\left(-\infty;\ -\dfrac{13}{5}\right] \bigcup\, [3; +\infty)$.

П р и м е р 3. (Экон-89.3) Решить уравнение $||3-x|-x+1|+x=6$.

Р е ш е н и е. Перепишем уравнение в виде $||x-3|-x+1|=6-x$ и будем раскрывать модули, начиная с внутреннего.

Первый случай:

$$\begin{cases} x \geq 3, \\ |x-3-x+1| = 6-x; \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 3, \\ 2 = 6-x; \end{cases} \iff x=4.$$

Второй случай:

$$\begin{cases} x < 3, \\ |3-x-x+1| = 6-x; \end{cases} \iff \begin{cases} x < 3, \\ |2x-4| = 6-x. \end{cases}$$

Так как при $x<3$ всегда $6-x>0$, то дальше удобнее раскрывать модуль через геометрический смысл:

$$\begin{cases} x < 3, \\ \left[\begin{array}{l} 2x-4 = 6-x; \\ 2x-4 = x-6; \end{array} \right. \end{cases} \iff \begin{cases} x < 3, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{10}{3}; \\ x = -2; \end{array} \right. \end{cases} \iff x=-2.$$

О т в е т. -2; 4.

Задачи

1. (Хим-00.1) Решить уравнение $|x|=2-x$.
2. (Геол.ОГ-79.1) Решить уравнение $|2x-3|=3-2x$.
3. (Геогр-77.1) Решить неравенство $2|x+1|>x+4$.
4. (Геогр-96(1).1) Решить уравнение $|5x-3|-|7x-4|=2x-1$.
5. (Биол-95.2) Решить уравнение $|x-1|+|2x-3|=2$.
6. (Геогр-00.2) Решить уравнение $|2x+8|-|x-5|=12$.
7. (Псих-95.1) Решить уравнение $|2x-15|=22-|2x+7|$.
8. (Псих-98.1) Решить уравнение $|4x-|x-2|+3|=16$.
9. (Геогр-97.1.) Решить неравенство $\dfrac{|x-1|+10}{4|x-1|+3}>2$.
10. (Хим-96(1).3) Решить неравенство $|x+|1-x||>3$.
11. (Геол-91.6) При всех значениях параметра a решить уравнение
а) $|x+2|+a|x-4|=6$; б) $|x+3|-a|x-1|=4$.
12. (Физ-84.4) Найти все значения параметра a, при которых все решения уравнения $2|x-a|+a-4+x=0$ принадлежат отрезку $[0;4]$.

1.4. Квадратный трёхчлен, разложение квадратного трёхчлена на множители, квадратные уравнения и неравенства, теорема Виета

Теоретический материал

Квадратным трёхчленом называется выражение вида

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

где a, b, c – коэффициенты (постоянные числа), $a \neq 0$, x – переменная. Если $a = 1$, то квадратный трёхчлен называется приведённым.

Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ называется *квадратным уравнением.*

Число $x_0 \in \mathbb{R}$ называется действительным *корнем квадратного трёхчлена*, если $f(x_0) = 0$. Соответственно, это же значение x_0 обращает квадратное уравнение в верное равенство, то есть является корнем квадратного уравнения.

Число $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.

По значению дискриминанта можно определить количество корней: если

- $D < 0$, то квадратный трёхчлен не имеет действительных корней;
- $D = 0$, то квадратный трёхчлен имеет единственный корень $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ (иногда говорят о наличии двух совпадающих корней);
- $D > 0$, то квадратный трёхчлен имеет два корня, вычисляемые по формулам: $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

Замечание. В случае $b = 2p$, $p \in \mathbb{R}$, формулы корней можно упростить, используя понятие чётного дискриминанта: $D_1 = p^2 - ac$. Тогда формулы для корней принимают вид

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{D_1}}{a}, \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{D_1}}{a}.$$

Разложение на линейные множители. Если дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ положителен, то справедливо разложение

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни квадратного трёхчлена.

Замечание. В случае нулевого дискриминанта квадратный трёхчлен преобразуется к виду $a(x - x_0)^2$, где $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ – его корень.

Используя формулы корней квадратного трёхчлена (в случае неотрицательного дискриминанта, то есть при их наличии), можно установить связь между корнями и коэффициентами, которая нередко позволяет избежать непосредственного вычисления самих корней.

Теорема Виета. Если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два корня x_1 и x_2 (может быть, совпадающих), то для них выполнены соотношения

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases} \tag{14}$$

Обратная теорема Виета. Если числа x_1 и x_2 являются решениями системы

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1x_2=q, \end{cases} \tag{15}$$

то они же являются корнями приведённого квадратного трёхчлена x^2+px+q.

Применяя формулы сокращённого умножения и соотношения из теоремы Виета, можно получить полезные выражения для вычисления различных комбинаций корней квадратного уравнения без непосредственного вычисления самих корней. Например:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}; \tag{16}$$

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right)=-\frac{b}{a}\left(\frac{b^2}{a^2}-3\frac{c}{a}\right); \tag{17}$$

$$x_1^4+x_2^4=\left((x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right)^2-2(x_1x_2)^2=\left(\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}\right)^2-2\frac{c^2}{a^2}. \tag{18}$$

Подобным образом можно выразить и многие другие комбинации корней через коэффициенты квадратного уравнения.

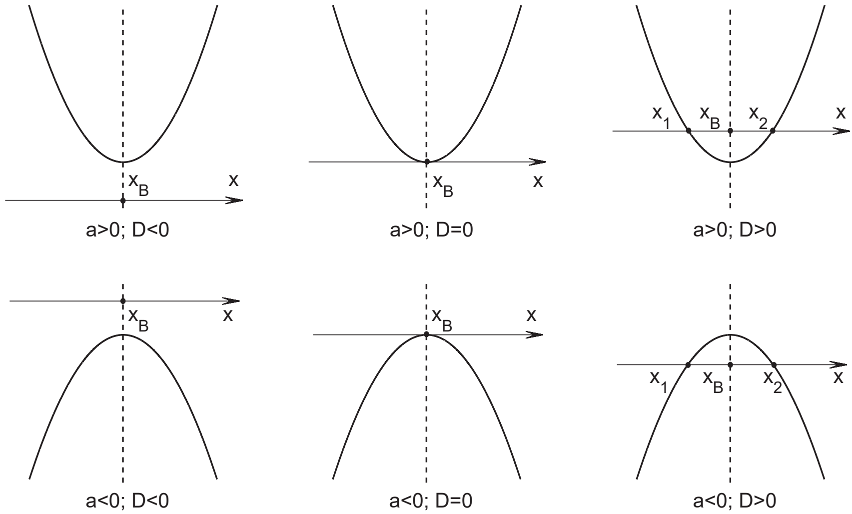
График квадратичной функции. Функция вида $f(x)=ax^2+bx+c$, где $a\neq 0$, называется *квадратичной функцией*. В силу представления

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a},$$

где $D=b^2-4ac$, можно говорить о том, что график квадратичной функции получается из графика степенной функции $y=x^2$ последовательными элементарными преобразованиями:

$$y=x^2 \ \to\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \ \to\ a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \ \to\ a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}=f(x);$$

то есть графиком квадратичной функции $f(x)$ является парабола с вершиной $(x_{\text{в}};y_{\text{в}})$, где $x_{\text{в}}=-\dfrac{b}{2a}$, $y_{\text{в}}=-\dfrac{D}{4a}$. Вертикальная прямая $x=-\dfrac{b}{2a}$ задаёт её ось симметрии.



Ветви параболы направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$.

Пересечение параболы с осью абсцисс обусловливается наличием корней у квадратного трёхчлена, то есть знаком его дискриминанта.

З а м е ч а н и е. Опираясь на знание расположения параболы на координатной плоскости, можно решать квадратные неравенства, избегая промежуточных преобразований. Например, для $f(x) = ax^2 + bx + c$ при $D = b^2 - 4ac > 0$ и $a > 0$:

- $f(x) > 0$ при $x < x_1$ или $x > x_2$;
- $f(x) < 0$ при $x_1 < x < x_2$;

где x_1 и x_2 – корни трёхчлена.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. (Геогр-80.1) Найти все значения параметра k, при которых уравнение $x^2 - 2kx + k^2 + 2k - 1 = 0$ имеет два различных решения.

Р е ш е н и е. Рассмотрим уравнение как квадратное относительно x и вычислим его дискриминант:

$$x^2 - 2kx + k^2 + 2k - 1 = 0, \quad D_1 = k^2 - (k^2 + 2k - 1) = 1 - 2k.$$

Два различных решения у квадратного уравнения будут лишь при положительном дискриминанте: $1 - 2k > 0$, откуда $k < \dfrac{1}{2}$.

О т в е т. $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right)$.

П р и м е р 2. (Экон.М-00.1) Решить уравнение $3|x+1|+x^2+4x-3=0$.

Р е ш е н и е. Подмодульное выражение меняет знак в точке $x=-1$.

Первый случай:

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ 3(x+1)+x^2+4x-3=0; \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -1, \\ x^2+7x=0; \end{cases} \iff x=0.$$

Второй случай:

$$\begin{cases} x < -1, \\ -3(x+1)+x^2+4x-3=0; \end{cases} \iff \begin{cases} x < -1, \\ x^2+x-6=0; \end{cases} \iff x=-3.$$

О т в е т. $-3;\ 0$.

П р и м е р 3. (У) Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $3x^2-5x-4=0$. Найти $x_1^3x_2+x_1x_2^3$.

Р е ш е н и е. Дискриминант данного квадратного уравнения $D=73$; следовательно, корни иррациональны, и непосредственное вычисление выражения $x_1^3x_2+x_1x_2^3$ будет громоздким. В этом случае удобнее выразить искомую комбинацию корней через коэффициенты квадратного уравнения, используя теорему Виета.

В искомом выражении вынесем общий множитель за скобку и воспользуемся формулами (14) и (16):

$$x_1^3x_2+x_1x_2^3=x_1x_2(x_1^2+x_2^2)=\frac{c}{a}\cdot\left(\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}\right).$$

Подставив $a=3,\ b=-5,\ c=-4$, получим $-196/27$.

О т в е т. $-196/27$.

Задачи

1. (Физ-83.2) Решить уравнение $|5x^2-3|=2$.
2. (Соц-00.1) Решить уравнение $|x^2-3x|=2x-4$.
3. (Геол-81.1) Решить уравнение $x^2-4x+|x-3|+3=0$.
4. (Биол-96.2) Решить уравнение $(x-7)^2-|x-7|=30$.
5. (Геол-95.2) Решить неравенство $x^2-6 \geq |x|$.
6. (Геол-77.2) Решить неравенство $x^2-|5x-3|-x<2$.
7. (Хим-95.1) Решить неравенство $\dfrac{3x}{x^2+2} \geq 1$.
8. (ВМК-87.2) Существуют ли действительные значения a, для которых $a^2-4a+\sqrt{3}=-a\sqrt{2}$? Если да, то сколько их?