Содержание

Предисловие

Основная идея предлагаемой книги — органически совместить в одном учебном пособии изложение принципов теории и практику решения задач. С этой целью в каждой главе сначала излагается теория соответствующего вопроса (с иллюстрацией на конкретных примерах), а затем дается разбор ряда задач, где показывается, к а к, по мнению автора, следует подходить к их решению. Задачи тесно связаны с основным текстом, часто являются его развитием и дополнением, поэтому работа над ними должна проводиться параллельно с изучением основного материала. Кроме того, предлагаемый набор задач должен, по замыслу автора, дать возможность учащемуся дополнительно обдумать ряд важных вопросов и помочь представить (даже если многие задачи не решать, а просто прочитать их условия) большой диапазон приложения изучаемых идей.

При изложении теоретического материала автор стремился исключить из текста все второстепенное, с тем чтобы сконцентрировать внимание читателя на *основных* законах волновых процессов и, в частности, на вопросах наиболее трудных для понимания. Стремление изложить основные идеи кратко, доступно и вместе с тем достаточно корректно побудило автора насколько возможно освободить материал от излишней математизации и перенести основной акцент на физическую сторону рассматриваемых явлений. Именно поэтому из двух форм представления комплексной амплитуды автор предпочел векторную, как более простую и наглядную. С той же целью широко использованы различные модельные представления, упрощающие факторы, частные случаи, соображения симметрии и др.

Изложение ведется в СИ. Вместе с тем, учитывая достаточно широкое использование системы Гаусса, в Приложении дана сводка основных единиц и наиболее важных формул в СИ и в системе Гаусса.

Курсивом выделены важнейшие положения и термины. Петит используется для материала повышенной трудности и относительно громоздких расчетов (этот материал при первом чтении можно безболезненно опустить), а также для примеров и задач.

В данном издании материал книги дополнен двумя параграфами: § 1.6. Звуковые волны и § 3.4. Фотометрические величины. Дополнены также Приложения. Внесены некоторые уточнения, а также исправлены замеченные ошибки и опечатки.

Книга как учебное пособие рассчитана на студентов вузов с расширенной программой по физике (в рамках курса общей физики). Она может быть полезной и преподавателям вузов.

И. Иродов.

Принятые обозначения

Векторы обозначены полужирным прямым шрифтом (например, $\mathbf{v}$, $\mathbf{E}$); та же буква курсивом и светлым шрифтом (v, E) означает модуль вектора.

Средние величины отмечены скобками $\langle\ \rangle$, например $\langle\lambda\rangle$, $\langle\mathbf{\Pi}\rangle$.

Символы перед величинами означают:

Δ — конечное приращение величины, т. е. разность ее конечного и начального значений, например $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, $\Delta\mathbf{E} = \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1$;

d — дифференциал (бесконечно малое приращение), например, $\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}\mathbf{k}$.

δ — элементарное значение величины, например $\delta\lambda$;

$\propto$ — знак пропорциональности;

$\sim$ — величина порядка... ($\lambda \sim 10^{-8}$ см).

Орты — единичные векторы:

$\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ (или $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$) — орты декартовых координат;

$\mathbf{e}_r$ — орт радиуса-вектора;

$\mathbf{n}$ — орт нормали к элементу поверхности;

$\boldsymbol{\tau}$ — орт касательной к контуру или границе раздела.

Производная по времени от произвольной функции x обозначена $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ или точкой над функцией, $\dot{x}$. То же для второй производной: $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$ или $\ddot{x}$.

Интегралы любой кратности обозначены одним-единственным знаком $\int$ и различаются лишь обозначением элемента интегрирования: $\mathrm{d}V$ — элемент объема, $\mathrm{d}\mathbf{S}$ — элемент поверхности, $\mathrm{d}\mathbf{l}$ — элемент контура. Знак $\oint$ обозначает интегрирование по замкнутой поверхности или по замкнутому контуру.

Векторный оператор ∇ (набла). Операции с ним обозначены так:

$\nabla\varphi$ — градиент φ (grad φ),

$\nabla \cdot \mathbf{E}$ — дивергенция $\mathbf{E}$ (div $\mathbf{E}$),

$\nabla \times \mathbf{E}$ — ротор $\mathbf{E}$ (rot E).

Часть I
Волны

Глава 1
Упругие волны

§ 1.1. Уравнение волны

Упругой волной называют процесс распространения возмущения в упругой среде. При этом происходит распространение именно возмущения частиц среды, но сами частицы испытывают движения около своих положений равновесия. Среду будем рассматривать как сплошную и непрерывную, отвлекаясь от ее атомистического строения.

Различают волны *продольные* и *поперечные*, в зависимости от того, движутся ли частицы около своих положений равновесия вдоль или поперек направления распространения волны.

Уравнение волны. Несмотря на большое разнообразие физических процессов, вызывающих волны, их образование происходит по общему принципу. Возмущение, происшедшее в какой-нибудь точке A среды в некоторый момент времени, проявляется спустя определенное время на интересующем нас расстоянии от точки A, т. е. передается с определенной скоростью.

Рассмотрим для простоты распространение возмущения вдоль длинного натянутого шнура, с которым совместим ось X. Мы можем представить возмущение ξ — смещение элементов шнура из положения равновесия — как функцию координаты x и времени t, т. е. $\xi = f(x,t)$. Легко видеть, что распространение возмущения со скоростью v в положительном направлении оси X изобразится той же функцией f, если в ее аргумент x и t будут входить в виде комбинации $(vt - x)$ или $(t - x/v)$. Действительно, такое строение аргумента показывает, что значение функции f, которое она имела в точке x в момент t, будет в дальнейшем сохраняться, если $vt - x = \text{const}$. Но это так и есть, поскольку именно при этом условии $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = v$.

Итак, любая функция от аргумента $(vt - x)$ или $(t - x/v)$ выражает распространение возмущения со скоростью v:

$$\xi(x,t) = f(t - x/v). \tag{1.1}$$

Это и есть уравнение волны, распространяющейся в положительном направлении оси X. Волна же, распространяющаяся в отрицательном направлении X, описывается уравнением

$$\xi(x,t) = f(t + x/v). \tag{1.2}$$

Особую роль среди различных волн играет *гармоническая волна*. Во многих отношениях это простейшее волновое движение и его выделенность связана с особыми свойствами гармонических осцилляторов. Уравнение гармонической волны имеет вид

$$\xi(x,t) = a\cos\omega(t - x/v), \tag{1.3}$$

где a — амплитуда волны, ω — циклическая (круговая) частота колебаний частиц среды (с^{-1}). Эта волна периодична во времени и пространстве, поскольку сама функция периодична и ее период равен 2π. Из периодичности во времени $\omega\Delta t = 2\pi$ находим $\Delta t = 2\pi/\omega$. Этот промежуток времени называют *периодом колебаний*:

$$T = 2\pi/\omega. \tag{1.4}$$

Из периодичности в пространстве $\omega\Delta x/v = 2\pi$ находим $\Delta x = 2\pi v/\omega = vT$. Расстояние Δx называют *длиной волны* λ. Таким образом, длина волны — это расстояние между ближайшими точками среды, колеблющимися с разностью фаз 2π. Другими словами, это расстояние, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний T:

$$\lambda = vT. \tag{1.5}$$

Поскольку $T = 1/\nu$, где ν — частота колебаний (Гц), формулу (1.5) можно представить и так:

$$\lambda = v/\nu. \tag{1.6}$$

Уравнение гармонической волны (1.3) принято записывать в симметричном более удобном и простом виде. Для этого внесем ω в скобку, тогда

$$\omega t - \omega x/v = \omega t - kx,$$

где $k = \omega/v = 2\pi/Tv$, или

$$k = 2\pi/\lambda. \qquad (1.7)$$

Величину k называют *волновым числом.*

Тогда уравнение (1.3) примет следующий симметричный вид:

$$\xi = a\cos(\omega t - kx). \qquad (1.8)$$

Отметим, что фигурирующая выше скорость v — это *фазовая скорость* волны,

$$v = \omega/k, \qquad (1.8')$$

т. е. скорость, с которой распространяется определенное значение *фазы волны* — величины в скобках формул (1.1), (1.2), (1.8). Именно фаза характеризует определенное состояние движения частиц среды при прохождении волны.

Вообще говоря, в фазу волны должна быть включена и начальная фаза α, определяемая выбором начал отсчета x и t. В случае одной волны всегда можно добиться того, чтобы α была равна нулю, что мы и предполагаем. При совместном же действии нескольких волн это сделать, как правило, не удается.

До сих пор предполагалось, что волна распространяется в непоглощающей упругой среде, поэтому ее амплитуда $a = \text{const}$. С учетом же поглощения амплитуда волны, как показывает опыт, уменьшается с расстоянием x по закону $a = a_0 e^{-\gamma x}$, где γ — *коэффициент затухания волны* ($м^{-1}$), и уравнение волны будет иметь вид:

$$\xi = a_0 e^{-\gamma x}\cos(\omega t - kx). \qquad (1.9)$$

Уравнение плоской волны. Уравнения (1.1), (1.2), (1.8) описывают и плоскую волну в упругой среде. В плоской волне *волновые поверхности* (где точки среды колеблются в одинаковой фазе) имеют вид плоскостей. Когда говорят, что плоская волна распространяется вдоль оси X, то это надо понимать так, что ее волновые поверхности (плоскости) перпендикулярны этой оси.

Если же плоская волна распространяется в произвольном направлении, которое характеризуется единичным вектором **n** (рис. 1.1), то

$$\xi = f(t - l/v) = f(t - \mathbf{rn}/v), \tag{1.10}$$

где $\mathbf{rn} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$, α, β, γ — углы между вектором **n** и осями координат.

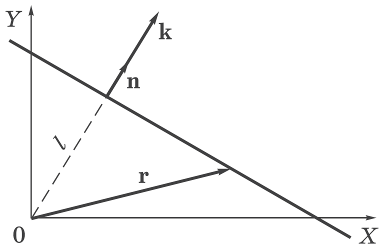

Рис. 1.1

Для гармонической волны $\cos\omega(t - \mathbf{nr}/v) = \cos(\omega t - \mathbf{rn}\omega/v)$ и

$$\xi = a\cos(\omega t - \mathbf{kr}), \tag{1.11}$$

где **k** — *волновой вектор*:

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{v}\mathbf{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{n}. \tag{1.12}$$

До сих пор, говоря о фазовой скорости v, мы имели в виду (как обычно и предполагают, если нет оговорок) скорость распространения данной фазы в направлении волнового вектора **k**, т. е. $v = \omega/k$ согласно (1.8′). А как обстоит дело, если нас интересует скорость ее распространения в другом направлении, составляющем, например, угол φ с вектором **k**? Для ответа на этот вопрос воспользуемся уравнением волны (1.11).

Из условия, что фаза (выражение в скобках) должна быть постоянной, т. е. $\omega t - \mathbf{kr} = \mathrm{const}$, следует после дифференцирования по t

$$\omega = \mathbf{kv}_\varphi, \tag{1.12′}$$

где $\mathbf{v}_\varphi = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$ — скорость распространения фазы в интересующем нас направлении. Из (1.12′) следует, что $\omega = kv_\varphi \cos\varphi$ и

$$v_\varphi = \frac{\omega/k}{\cos\varphi} = \frac{v}{\cos\varphi}, \tag{1.12''}$$

где $v = \omega/k$ — фазовая скорость в направлении вектора $\mathbf{k}$, т. е. при $\varphi = 0$.

Таким образом, если фазовая скорость плоской волны в направлении вектора $\mathbf{k}$ равна v, то в направлениях осей X, Y, Z, с которыми вектор $\mathbf{k}$ составляет углы α, β, γ соответственно, скорости распространения данной фазы будут равны*:

$$v_\alpha = v/\cos\alpha, \quad v_\beta = v/\cos\beta, \quad v_\gamma = v/\cos\gamma.$$

Это позволяет утверждать, что фазовая скорость v не является вектором. В противном случае мы имели бы $v_x = v\cos\alpha$ и т. д.

Из последних трех выражений следует, что при достаточно малом значении какого-либо из углов α, β, γ соответствующая фазовая скорость может оказаться больше скорости света c. Это не должно вызывать недоумения, поскольку такие фазовые скорости не связаны ни со скоростью частиц, ни со скоростью переноса информации, и теории относительности не противоречат.

При распространении волны в поглощающей среде в уравнения (1.10) и (1.11) нужно добавить экспоненциальный множитель $\mathrm{e}^{-\gamma l} = \mathrm{e}^{-\gamma \mathbf{nr}}$.

Сферическая и цилиндрическая волны. В однородной изотропной среде продольная волна от точечного источника представляет собой сферически расходящееся возмущение вида

$$\xi = \frac{1}{r} f(t - r/v), \tag{1.13}$$

где r — расстояние от точечного источника. В частности, если источник возбуждает продольные монохроматические колебания, то предыдущее уравнение принимает вид

$$\xi = \frac{a_0}{r}\cos(\omega t - kr), \tag{1.14}$$

* Этот же результат можно получить и из более общей формулы (1.10) для плоской волны. Надо только учесть, что под v здесь понимается фазовая скорость в направлении орта $\mathbf{n}$.

где a_0 — постоянная, a_0/r — амплитуда волны. Ее волновые поверхности являются сферическими. Отметим, что в выражении (1.14) стоит именно k (волновое число), а не волновой вектор $\mathbf{k}$, как для плоской гармонической волны.

Если учитывать поглощение среды, то в формулы (1.13) и (1.14) следует добавить множитель $e^{-\gamma r}$.

Интересно, что при прохождении сферической волны в каждой точке среды всегда наблюдаются как сгущения, так и разряжения (в отличие от плоской волны, которая может состоять только из одних сгущений или разряжений).

Другой важный вид симметричной волны — *цилиндрическая*, расходящаяся например от источников, равномерно распределенных вдоль оси в однородной среде. Структура цилиндрической волны значительно сложнее сферической, и ее форма не повторяет временного поведения функции источника, как в случае сферической, — волна тянет за собой длинный «шлейф». И только на больших расстояниях R от источника (больших по сравнению с характерным параметром данной волны) ее можно представить в виде

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{R}} f(t - R/v). \tag{1.15}$$

В частности, монохроматическая расходящаяся волна на расстояниях R, значительно превышающих ее длину волны, имеет вид

$$\xi = \frac{a}{\sqrt{R}} \cos(\omega t - kR), \tag{1.16}$$

где a — постоянная. Цилиндрическая волна, как и сферическая, непременно должна содержать как сгущения, так и разряжения.

§ 1.2. Волновые уравнения

Линейное волновое уравнение. Аналогично основному уравнению динамики, которое описывает *все* возможные движения материальной точки, и здесь, в области волновых процессов, существуют уравнения, являющиеся обобщенным выражением волн, независимо от их конкретного вида. Это дифференциальные уравнения в частных производных, связывающие изменения функций, характеризующих волну, во времени и пространстве.

Найдем эту связь для волн типа $\xi = f(t - x/v)$. Обозначим фазу волны буквой φ, т. е. $\varphi = t - x/v$. Тогда

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \xi'_{\varphi} \cdot 1; \qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \xi'_{\varphi}\left(-\frac{1}{v}\right) = -\xi'_{\varphi}/v. \tag{1.17}$$

Сопоставив полученные выражения, получим

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{v}\frac{\partial \xi}{\partial t}. \tag{1.18}$$

Это уравнение справедливо, к сожалению, только для волн, распространяющихся в положительном направлении оси X. Для волн, распространяющихся в отрицательном направлении оси X, справа, как нетрудно проверить, должен стоять знак «+».

Таким образом, можно написать

$$\boxed{\frac{\partial \xi}{\partial x} = \mp\frac{1}{v}\frac{\partial \xi}{\partial t},} \tag{1.19}$$

где знаки «−» и «+» относятся только к тем волнам, которые распространяются соответственно в положительном или отрицательном направлении оси X.

Уравнение (1.19) является простейшим *волновым уравнением*. Во многих случаях оно оказывается весьма полезным.

Выясним физический смысл производных, входящих в это волновое уравнение. Производная по времени $\partial\xi/\partial t = u_x$ — это проекция скорости частицы среды, движущейся около своего положения равновесия, а $\partial\xi/\partial x = \varepsilon$ — *относительная деформация среды*. Последнее надо пояснить.

Выделим мысленно малый (по сравнению с изменением профиля волны) цилиндрический элемент среды Δx (рис. 1.2) вдоль направления распространения волны. При прохождении продольной волны

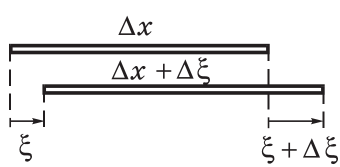

Рис. 1.2

этот элемент будет смещаться и деформироваться. Например, левый его торец переместится на ξ, а правый — на $\xi + \Delta\xi$. По определению, относительная деформация

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\xi}{\Delta x} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\,. \tag{1.20}$$

Эта величина алгебраическая, она может быть больше нуля (растяжение), равна нулю и меньше нуля (сжатие).

Пример. Продольная волна распространяется в длинном стержне (ось X). В некоторый момент смещения частиц из положения равновесия $\xi(x)$ имеют вид как на рис. 1.3. Зная, что волна распространяется в положительном направлении оси X, найдем (качественно) зависимость скорости частиц среды в этот момент от координаты x.

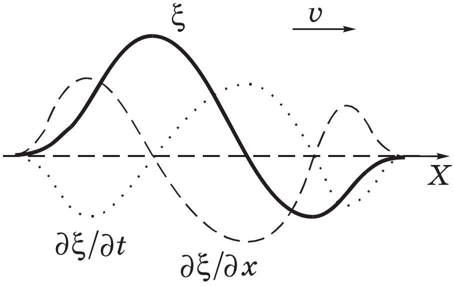

Рис. 1.3

Мы знаем, что $\partial\xi/\partial t$ зависит от $\partial\xi/\partial x$, согласно уравнению (1.19). Имея в виду, что производная $\partial\xi/\partial x$ в каждой точке характеризует наклон (или крутизну) кривой $\xi(x)$, изобразим график $\partial\xi/\partial x$ как функцию x (штриховой линией).

Поскольку волна распространяется в положительном направлении оси X, в уравнении (1.19) должен быть знак «$-$». Это означает, что график $\partial\xi/\partial t(x)$ будет «зеркальным» по отношению к графику $\partial\xi/\partial x$. Он изображен точечной кривой.

Общее волновое уравнение. Уравнение (1.19) соответствует волне, распространяющейся или в положительном направлении оси X (знак «$-$»), или в отрицательном (знак «$+$»). Можно, однако, получить уравнение, справедливое для волны любого направления, а также и для суперпозиции таких волн. Для этого продифференцируем выражения (1.17) еще раз по t и по x соответственно:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\xi'_\varphi\right) = \frac{\partial \xi'_\varphi}{\partial \varphi}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \xi''_\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\frac{1}{v}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\xi'_\varphi\right) = -\frac{1}{v}\,\frac{\partial \xi'_\varphi}{\partial \varphi}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{v}\,\xi''_\varphi\left(-\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v^2}\,\xi''_\varphi.$$

Из сопоставления этих выражений получим:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},} \qquad (1.21)$$

где v — фазовая скорость. Это одномерное волновое уравнение 2-го порядка в частных производных. Ему удовлетворяют как возмущения вида (1.1), (1.2), так и более общее решение

$$\xi = f_1(t - x/v) + f_2(t + x/v), \qquad (1.22)$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции, соответствующие волнам, распространяющимся в противоположных направлениях оси X.

Заметим, что волновые уравнения (1.19) и (1.21) справедливы для однородных изотропных сред, затухание в которых пренебрежимо мало*, и при условии $\xi \ll \lambda$.

Обобщение уравнения (1.21) на трехмерный случай приводит к волновому уравнению вида

$$\boxed{\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},} \qquad (1.23)$$

где $\nabla^2 \xi = \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$, ∇^2 — *оператор Лапласа.*

Уравнение (1.23) можно получить так. Обратимся сначала к уравнению (1.21). В нем v — это фазовая скорость волны, распространяющейся вдоль оси X. Это значит, что в случае плоской волны, распро-

* При наличии затухания одномерное волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2\gamma\,\frac{\partial \xi}{\partial x} + \gamma^2 \xi = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

где γ — коэффициент затухания волны.