

# Оглавление

Предисловие . . . . .	8
Основные обозначения . . . . .	9

## Часть I. Функции одной переменной

<b>Глава 1.</b> Вещественные числа. Счётные и несчётные множества . . . . .	13
§ 1.1. Дедекиндовы сечения . . . . .	13
§ 1.2. Десятичная запись вещественного числа . . . . .	15
§ 1.3. Некоторые неравенства . . . . .	16
§ 1.4. Отображения множеств . . . . .	17
§ 1.5. Счётные и несчётные множества . . . . .	17
§ 1.6. Теорема Кантора—Бернштейна . . . . .	21
§ 1.7. Решения задач . . . . .	22
<b>Глава 2.</b> Предел последовательности . . . . .	29
§ 2.1. Свойства пределов . . . . .	29
§ 2.2. Возрастающие последовательности. Теорема Вейерштрасса . . . . .	31
§ 2.3. Последовательности Коши . . . . .	32
§ 2.4. Вычисление некоторых пределов . . . . .	34
§ 2.5. Число $e$ . . . . .	36
§ 2.6. Верхний и нижний пределы . . . . .	38
§ 2.7. Теорема Тёплица . . . . .	40
§ 2.8. Решения задач . . . . .	41
<b>Глава 3.</b> Непрерывные функции . . . . .	51
§ 3.1. Предел функции . . . . .	51
§ 3.2. Непрерывность . . . . .	53
§ 3.3. Теорема о промежуточном значении . . . . .	55
§ 3.4. Свойства функций, непрерывных на отрезке . . . . .	55
§ 3.5. Логарифм и показательная функция . . . . .	56
§ 3.6. Гиперболические функции . . . . .	58
§ 3.7. Равномерная непрерывность. Равномерная сходимоть . . . . .	59
§ 3.8. Липшицевы функции и теорема о неподвижной точке . . . . .	62
§ 3.9. Выпуклые функции . . . . .	63
§ 3.10. Функции ограниченной вариации . . . . .	65
§ 3.11. Решения задач . . . . .	66
<b>Глава 4.</b> Топология вещественных чисел . . . . .	79
§ 4.1. Открытые и замкнутые множества . . . . .	79
§ 4.2. Компактные множества . . . . .	82

§ 4.3. Связные множества . . . . .	85
§ 4.4. Всюду плотные множества . . . . .	87
§ 4.5. Совершенные множества . . . . .	88
§ 4.6. Полунепрерывные функции . . . . .	90
§ 4.7. Теорема Бэра . . . . .	91
§ 4.8. Предел по фильтру . . . . .	92
§ 4.9. Решения задач . . . . .	93
<b>Глава 5. Дифференцируемые функции . . . . .</b>	<b>102</b>
§ 5.1. Определение производной . . . . .	102
§ 5.2. Производные элементарных функций . . . . .	104
§ 5.3. Производная многочлена и кратные корни . . . . .	105
§ 5.4. Касательная и нормаль . . . . .	106
§ 5.5. Функции, дифференцируемые на отрезке . . . . .	107
§ 5.6. Неравенства . . . . .	109
§ 5.7. Правило Лопиталья . . . . .	110
§ 5.8. Алгебраические и трансцендентные функции . . . . .	111
§ 5.9. Формула Тейлора . . . . .	111
§ 5.10. Равномерная сходимость дифференцируемых функций . . . . .	114
§ 5.11. Промежуточные значения производной . . . . .	115
§ 5.12. Многочлены Чебышёва . . . . .	116
§ 5.13. Интерполяционные многочлены Лагранжа и Эрмита . . . . .	118
§ 5.14. Формула Фаа-ди-Бруно . . . . .	120
§ 5.15. Решения задач . . . . .	122
<b>Глава 6. Интегрирование . . . . .</b>	<b>134</b>
§ 6.1. Неопределённый интеграл . . . . .	134
§ 6.2. Вычисление неопределённых интегралов . . . . .	135
§ 6.3. Интеграл Римана . . . . .	140
§ 6.4. Теорема о среднем . . . . .	142
§ 6.5. Формула Ньютона—Лейбница . . . . .	143
§ 6.6. Формула замены переменной в определённом интеграле . . . . .	144
§ 6.7. Остаточный член в интегральной форме . . . . .	145
§ 6.8. Вычисление определённых интегралов . . . . .	146
§ 6.9. Вычисление площадей . . . . .	147
§ 6.10. Вычисление объёмов . . . . .	147
§ 6.11. Длина кривой . . . . .	148
§ 6.12. Площадь поверхности вращения . . . . .	149
§ 6.13. Некоторые применения интегралов . . . . .	151
§ 6.14. Несобственные интегралы . . . . .	152
§ 6.15. Равномерная сходимость интегрируемых функций . . . . .	153
§ 6.16. Ортогональные многочлены . . . . .	156
§ 6.17. Среднее значение длины проекции . . . . .	161
§ 6.18. Преобразование Лежандра . . . . .	163
§ 6.19. Среднее арифметико-геометрическое . . . . .	164

§ 6.20. Прямая как дифференцируемое многообразие . . . . .	166
§ 6.21. Решения задач . . . . .	168
<b>Глава 7. Ряды . . . . .</b>	<b>182</b>
§ 7.1. Ряды с положительными членами . . . . .	182
§ 7.2. Абсолютно сходящиеся ряды . . . . .	188
§ 7.3. Признак Абеля сходимости рядов . . . . .	189
§ 7.4. Произведение Коши двух рядов . . . . .	191
§ 7.5. Гармонический ряд . . . . .	193
§ 7.6. Степенные ряды . . . . .	195
§ 7.7. Ряд для логарифма . . . . .	200
§ 7.8. Бином Ньютона . . . . .	201
§ 7.9. Ряды для числа $\pi$ . . . . .	202
§ 7.10. Производящие функции . . . . .	204
§ 7.11. Двойные ряды . . . . .	206
§ 7.12. Подстановка ряда в ряд . . . . .	208
§ 7.13. Экспонента в комплексной области . . . . .	210
§ 7.14. Степенные ряды в комплексной области . . . . .	211
§ 7.15. Числа и многочлены Бернулли . . . . .	213
§ 7.16. Бесконечные произведения . . . . .	215
§ 7.17. Эйлеровы разложения тригонометрических функций . . . . .	219
§ 7.18. Решения задач . . . . .	223
<b>Глава 8. Мера Лебега. Интеграл Лебега . . . . .</b>	<b>236</b>
§ 8.1. Множества меры нуль . . . . .	236
§ 8.2. Критерий Лебега интегрируемости по Риману . . . . .	237
§ 8.3. Мера Жордана и мера Лебега на прямой . . . . .	239
§ 8.4. Интеграл Лебега на прямой . . . . .	245
§ 8.5. Интеграл Стильтьеса . . . . .	250
§ 8.6. Решения задач . . . . .	251
<b>Часть II. Функции многих переменных</b>	
<b>Глава 9. Функции многих переменных . . . . .</b>	<b>255</b>
§ 9.1. Топология пространства $\mathbb{R}^n$ . . . . .	256
§ 9.2. Дифференциал . . . . .	257
§ 9.3. Теорема о среднем значении . . . . .	265
§ 9.4. Формула Тейлора . . . . .	267
§ 9.5. Метод множителей Лагранжа . . . . .	270
§ 9.6. Лемма Адамара . . . . .	274
§ 9.7. Решения задач . . . . .	274
<b>Глава 10. Теорема о неявной функции . . . . .</b>	<b>283</b>
§ 10.1. Формулировка теоремы о неявной функции . . . . .	283
§ 10.2. Теорема об обратной функции . . . . .	284

§ 10.3. Сжимающие отображения . . . . .	287
§ 10.4. Уравнение касательной плоскости . . . . .	289
§ 10.5. Метод множителей Лагранжа — 2 . . . . .	290
§ 10.6. Отображения постоянного ранга . . . . .	292
§ 10.7. Якобиан и функциональная зависимость . . . . .	294
§ 10.8. Локальное разложение диффеоморфизма . . . . .	295
§ 10.9. Решения задач . . . . .	297
<b>Глава 11. Кратные интегралы . . . . .</b>	<b>298</b>
§ 11.1. Повторный интеграл . . . . .	298
§ 11.2. Дифференцирование под знаком интеграла . . . . .	298
§ 11.3. Изменение порядка интегрирования . . . . .	300
§ 11.4. Равномерно сходящиеся интегралы . . . . .	302
§ 11.5. Кратный интеграл . . . . .	307
§ 11.6. Выражение кратного интеграла через повторный . . . . .	309
§ 11.7. Криволинейные и поверхностные интегралы . . . . .	312
§ 11.8. Замена переменных в кратном интеграле . . . . .	316
§ 11.9. Сферические координаты . . . . .	320
§ 11.10. Инвариантное интегрирование на пространстве прямых . . . . .	322
§ 11.11. Решения задач . . . . .	325
<b>Глава 12. Анализ на многообразиях . . . . .</b>	<b>327</b>
§ 12.1. Определение и основные свойства . . . . .	327
§ 12.2. Касательное пространство . . . . .	331
§ 12.3. Метод множителей Лагранжа — 3 . . . . .	334
§ 12.4. Дифференциальные формы в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	335
§ 12.5. Разбиение единицы . . . . .	343
§ 12.6. Дифференциальные формы на многообразиях . . . . .	347
§ 12.7. Интегрирование на многообразиях . . . . .	350
§ 12.8. Степень отображения . . . . .	353
§ 12.9. Функции Морса . . . . .	357
§ 12.10. Решения задач . . . . .	361

### Часть III. Дополнительные главы

<b>Глава 13. Специальные функции . . . . .</b>	<b>367</b>
§ 13.1. Определения гамма-функции . . . . .	367
§ 13.2. Свойства гамма-функции . . . . .	372
§ 13.3. Бета-функция . . . . .	374
§ 13.4. Интеграл Дирихле . . . . .	375
§ 13.5. Дробное интегрирование и дифференцирование . . . . .	377
§ 13.6. Функции Бесселя . . . . .	379
§ 13.7. Гипергеометрический ряд . . . . .	383
§ 13.8. Решения задач . . . . .	385

<b>Глава 14.</b> Ряды Фурье. Интеграл Фурье . . . . .	387
§ 14.1. Тригонометрические многочлены . . . . .	387
§ 14.2. Разложения по ортогональным системам функций . . . . .	389
§ 14.3. Ядро Дирихле и ядро Фейера . . . . .	391
§ 14.4. Теорема Фейера и сходимость рядов Фурье . . . . .	393
§ 14.5. Равенство Парсеваля . . . . .	396
§ 14.6. Теорема Вейерштрасса . . . . .	398
§ 14.7. Интеграл Фурье . . . . .	400
§ 14.8. Решения задач . . . . .	406
<b>Глава 15.</b> Расходящиеся ряды . . . . .	407
§ 15.1. Асимптотические разложения . . . . .	407
§ 15.2. Формула Эйлера—Маклорена . . . . .	409
§ 15.3. Суммирование расходящихся рядов . . . . .	412
<b>Глава 16.</b> Дополнительные темы классического анализа . . . . .	415
§ 16.1. Непрерывные дроби . . . . .	415
§ 16.2. Трансцендентность чисел $e$ и $\pi$ . . . . .	421
§ 16.3. Теорема Лиувилля об элементарных интегралах . . . . .	427
§ 16.4. Условно сходящиеся ряды векторов . . . . .	436
§ 16.5. Решения задач . . . . .	443
<b>Глава 17.</b> Квантовый анализ . . . . .	444
§ 17.1. $q$ -Факториал и $q$ -биномиальный коэффициент . . . . .	444
§ 17.2. $q$ -Производная . . . . .	445
§ 17.3. $q$ -Формула Тейлора для многочленов . . . . .	446
§ 17.4. Два $q$ -интеграла . . . . .	447
§ 17.5. Две $q$ -экспоненты . . . . .	449
§ 17.6. Исчисление конечных разностей . . . . .	452
§ 17.7. Решения задач . . . . .	453
<b>Глава 18.</b> $p$ -Адический анализ . . . . .	455
§ 18.1. Поле $p$ -адических чисел $\mathbb{Q}_p$ . . . . .	455
§ 18.2. Топология пространства $\mathbb{Q}_p$ . . . . .	457
§ 18.3. Дифференцирование . . . . .	458
§ 18.4. Некоторые элементарные функции . . . . .	459
§ 18.5. Решения задач . . . . .	460
Предметный указатель . . . . .	467
Указатель имён . . . . .	478

## Глава 5

# Дифференцируемые функции

### § 5.1. Определение производной

Производная функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  — это предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

Если этот предел существует, то говорят, что функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ .

Для функции  $f(x)$ , определённой на отрезке  $[a, b]$ , производные в точках  $a$  и  $b$  определяются как односторонние пределы.

Производную функции  $g(x) = f'(x)$  называют *второй производной* или *производной второго порядка* функции  $f(x)$  и обозначают  $f''(x)$ . Аналогично определяется производная третьего порядка  $f'''(x)$  и т. д. Производную  $n$ -го порядка обозначают  $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$ .

**Теорема 5.1.** Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , а прямая, проходящая через точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$ , где  $y_0 = f(x_0)$  и  $y_1 = f(x_1)$ , задаётся уравнением  $y - y_0 = k(x_1)(x - x_0)$ . Тогда

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} k(x_1) = f'(x_0).$$

**Доказательство.** Рассматриваемая прямая задаётся уравнением  $y - y_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$ , поэтому  $k(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ . Непосредственно из определения производной видно, что  $\lim_{x_1 \rightarrow x_0} k(x_1) = f'(x_0)$ .  $\square$

Прямую  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$  называют *касательной* к графику  $y = f(x)$  в точке  $(x_0, f(x_0))$ .

**Теорема 5.2.** Если функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то она непрерывна в этой точке.

**Доказательство.** Запишем тождество

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

При этом  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0$ . Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Это означает, что функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ .  $\square$

**Пример 5.1.** Функция  $f(x) = |x|$  всюду непрерывна, но не дифференцируема в точке  $x = 0$ .

**Теорема 5.3.** Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы в точке  $x_0$ , то:

- а)  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ ;  
 б)  $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ , где  $(fg)(x) = f(x)g(x)$ ;  
 в)  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ , если  $g(x_0) \neq 0$ .

**Доказательство.** а) Непосредственно следует из свойств предела суммы двух функций.

б) Пусть  $h(x) = f(x)g(x)$ . Тогда

$$h(x) - h(x_0) = f(x)(g(x) - g(x_0)) + g(x_0)(f(x) - f(x_0)).$$

Поделим обе части этого равенства на  $x - x_0$  и заметим, что  $f(x) \rightarrow f(x_0)$  при  $x \rightarrow x_0$ .

в) Пусть  $h(x) = f(x)/g(x)$ . Тогда

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left( g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right).$$

Устремляя  $x$  к  $x_0$ , получаем требуемое.  $\square$

Композицией функций  $f$  и  $g$  называют функцию  $g \circ f(x) = g(f(x))$ .

**Теорема 5.4.** Пусть функция  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , а функция  $g$  дифференцируема в точке  $y_0 = f(x_0)$ . Предположим, что у точки  $x_0$  есть такая окрестность  $U(x_0)$ , что если  $x$  принадлежит  $U(x_0)$  и  $x \neq x_0$ , то  $f(x) \neq f(x_0)$ . Тогда функция  $g \circ f$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$ .

**Доказательство.** Тождество

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = \frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

показывает, что функция  $g \circ f$  дифференцируема в точке  $x_0$  и

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0). \quad \square$$

Доказательство теоремы 5.4 получилось столь простым из-за предположения о том, что у точки  $x_0$  есть такая окрестность  $U(x_0)$ , что если  $x$  принадлежит  $U(x_0)$  и  $x \neq x_0$ , то  $f(x) \neq f(x_0)$ . В задаче 5.1 это предположение заменено другим.

**Задача 5.1.** Пусть функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , дифференцируема в точке  $x \in (a, b)$ , а функция  $g$  определена на некотором отрезке  $I$ , содержащем все значения функции  $f$  и дифференцируема в точке  $y = f(x)$ . Докажите, что функция  $h(t) = g(f(t))$  дифференцируема в точке  $x$  и  $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$ .

Пусть функция  $f(x)$  строго возрастает на отрезке  $[a, b]$ . Тогда каждой точке  $y$  отрезка  $[f(a), f(b)]$  соответствует единственная точка  $x$  отрезка  $[a, b]$ , для которой  $y = f(x)$ . Поэтому можно определить обратную функцию  $g(y) = x$ .

**Теорема 5.5.** Пусть  $f'(x_0) \neq 0$ ,  $g(y)$  — обратная к  $f(x)$  функция. Тогда если  $y_0 = f(x_0)$ , то  $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ .

**Доказательство.** Достаточно заметить, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)}. \quad \square$$

## § 5.2. Производные элементарных функций

Вычисление производных элементарных функций мы оставим в качестве задач.

**Задача 5.2.** Докажите, что  $(x^n)' = nx^{n-1}$  для любого натурального  $n$ .

**Задача 5.3.** Докажите, что  $(x^a)' = ax^{a-1}$  для любого вещественного  $a$  и положительного  $x$ .

**Задача 5.4.** Докажите, что  $(\sin x)' = \cos x$  и  $(\cos x)' = -\sin x$ .

**Задача 5.5.** Докажите, что  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$  и  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$  на области определения.

**Задача 5.6.** Докажите, что  $(a^x)' = a^x \ln a$  для  $a > 0$ .

**Задача 5.7.** Докажите, что  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ .

**Задача 5.8.** Докажите, что  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  и  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ .

Несложно проверить следующие формулы для производных гиперболических функций:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Теперь приведём несколько задач, связанных с применением производных элементарных функций.

**Задача 5.9.** Пусть функции  $u(x)$  и  $v(x)$  дифференцируемы и функция  $u(x)$  положительна. Докажите, что функция  $u^v = u(x)^{v(x)}$  дифференцируема, и найдите её производную.



**Задача 5.10.** Вычислите производную функции  $f(x) = x^{\sin x}$  (для  $x > 0$ ).

**Задача 5.11.** Пусть  $0 < a < \pi/2$  — постоянный угол. Вычислите производную функции  $f(x) = \cos^x a - \sin^x a$ .

### § 5.3. Производная многочлена и кратные корни

Корень  $x_0$  многочлена  $f(x)$  называют *кратным*, если  $f(x) = (x - x_0)^2 g(x)$ , где  $g(x)$  — некоторый многочлен.

**Теорема 5.6.** *Многочлен  $f(x)$  степени  $n \geq 2$  имеет кратный корень тогда и только тогда, когда многочлены  $f(x)$  и  $f'(x)$  имеют общий корень.*

**Доказательство.** Предположим, что  $f(x) = (x - x_0)^m g(x)$ , где  $m \geq 2$ . Тогда многочлен

$$f'(x) = m(x - x_0)^{m-1} g(x) + (x - x_0)^m g'(x)$$

имеет корень  $x_0$ .

Предположим, что  $f(x) = (x - x_0)g(x)$ , причём  $g(x_0) \neq 0$ . Тогда  $f'(x) = g(x) + (x - x_0)g'(x)$ , поэтому  $f'(x_0) = g(x_0) \neq 0$ . Таким образом, если все корни многочлена  $f(x)$  имеют кратность 1, то они не являются корнями многочлена  $f'(x)$ .  $\square$

**Задача 5.12.** Докажите, что многочлен

$$f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

не имеет кратных корней.

**Задача 5.13.** Пусть  $P(x)$  — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что все коэффициенты его  $n$ -й производной  $P^{(n)}(x)$  делятся на  $n!$  для любого натурального  $n$ .

**Задача 5.14.** Докажите, что среднее арифметическое корней многочлена степени  $n$ , имеющего  $n$  различных корней, равно среднему арифметическому корней его производной.

**Задача 5.15.** Пусть  $f$  и  $g$  — многочлены степени  $n$ . Докажите, что  $fg^{(n)} - f'g^{(n-1)} + f''g^{(n-2)} - f'''g^{(n-3)} + \dots + (-1)^n f^{(n)}g$  — константа.

**Задача 5.16.** Пусть  $p$  и  $q$  — вещественные числа. Сколько вещественных корней имеет кубическое уравнение  $x^3 + px + q = 0$  в зависимости от знаков числа  $p$  и дискриминанта  $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ ?

**Задача 5.17.** Пусть  $f(x) = (x - x_1)\dots(x - x_n)$ , где числа  $x_1, \dots, x_n$  попарно различны и отличны от нуля. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^k}{f'(x_i)} = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq k \leq n-2; \\ 1 & \text{при } k = n-1. \end{cases}$$

**Задача 5.18.** Пусть  $P(x) = (x - x_1)\dots(x - x_n)$ , где  $x_1, \dots, x_n$  — вещественные числа. Докажите, что  $(P'(x))^2 \geq P(x)P''(x)$  для всех вещественных  $x$ .

**Задача 5.19.** Докажите, что любой многочлен можно представить в виде разности двух монотонно возрастающих многочленов.

**Задача 5.20.** Докажите, что многочлен

$$P(x) = a_0 + a_1x^{k_1} + a_2x^{k_2} + \dots + a_nx^{k_n}$$

имеет не более  $n$  положительных корней.

**Задача 5.21\*.** Функция  $f(x)$  бесконечно дифференцируема на всей прямой, причём в каждой точке производная некоторого порядка равна нулю. Докажите, что  $f(x)$  — многочлен.

## § 5.4. Касательная и нормаль

*Касательная* в точке  $(x_0, f(x_0))$  к графику  $y = f(x)$  дифференцируемой функции задаётся уравнением

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Производная  $f'(x_0)$  — это тангенс угла наклона касательной.

Секущая, проходящая через точки  $(x_0, f(x_0))$  и  $(x_1, f(x_1))$  задаётся уравнением

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0),$$

поэтому касательная — предельное положение секущей при  $x_1 \rightarrow x_0$ .

**Задача 5.22.** Касательная к кривой  $y = e^x$  в точке  $(x_0, y_0)$  пересекает ось  $Ox$  в точке  $(x_1, 0)$ . Докажите, что разность  $x_1 - x_0$  одна и та же для всех точек кривой.

**Задача 5.23.** На параболе, ось которой параллельна оси  $Oy$ , взяты точки  $A_1, A_2$  и  $A_3$ . Пусть  $k_1$  — тангенс угла наклона касательной в точке  $A_1$ ,  $k_{ij}$  — тангенс угла наклона секущей  $A_iA_j$ . Докажите, что  $k_1 = k_{12} + k_{13} - k_{23}$ .

*Нормаль* к кривой  $y = f(x)$  в точке  $(x_0, y_0)$  — это прямая, проходящая через точку  $(x_0, y_0)$  перпендикулярно касательной в этой точке.

**Задача 5.24.** Докажите, что нормаль к кривой  $y = f(x)$  в точке  $(x_0, y_0)$  задаётся уравнением

$$-f'(x_0)(y - y_0) = x - x_0.$$

**Задача 5.25.** Нормаль к параболе  $y = x^2$  в точке  $(x_0, y_0)$  пересекает ось  $Oy$  в точке  $(0, y_1)$ . Докажите, что разность  $y_1 - y_0$  постоянна для всех точек параболы.

### § 5.5. Функции, дифференцируемые на отрезке

Значение функции, которое является наибольшим или наименьшим, называют *экстремальным*. Точку, в которой функция принимает экстремальное значение, называют *точкой экстремума*.

**Теорема 5.7** (Ферма). Пусть функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[a, b]$ , внутренняя точка  $x_0$  этого отрезка — точка экстремума и в точке  $x_0$  существует производная. Тогда  $f'(x_0) = 0$ .

**Доказательство.** Пусть для определённости  $f(x_0) \leq f(x)$  для всех  $x$  из отрезка  $[a, b]$ . Рассмотрим односторонние пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

В обоих пределах числитель неотрицателен. При этом в первом пределе знаменатель положителен, а во втором отрицателен. Значит, первый предел неотрицателен, а второй неположителен. Но оба предела равны  $f'(x_0)$ .  $\square$

**Историческое замечание.** Общий метод нахождения максимумов и минимумов Пьер Ферма (1601–1665) разработал в 1629 году.

**Теорема 5.8** (Ролль). Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на отрезке  $[a, b]$ , причём  $f(a) = f(b)$ . Тогда существует внутренняя точка  $x_0$  этого отрезка, для которой  $f'(x_0) = 0$ .

**Доказательство.** Функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , поэтому по теореме Вейерштрасса (теорема 3.7) среди её значений есть наибольшее  $M$  и наименьшее  $m$ . Если  $M = m$ , то функция  $f(x)$  постоянна, поэтому в качестве  $x_0$  можно взять любую внутреннюю точку отрезка. Если же  $M > m$ , то одно из этих двух значений достигается не в конце отрезка, потому что по условию  $f(a) = f(b)$ . Значит, в некоторой внутренней точке  $x_0$  отрезка  $[a, b]$  функция  $f(x)$  достигает наибольшего или наименьшего значения, поэтому по теореме Ферма (теорема 5.7)  $f'(x_0) = 0$ .  $\square$

**Историческое замечание.** Мишель Ролль (1652–1719) опубликовал теорему 5.8 для многочленов в 1691 году. Его подход был чисто алгебраический, он был убеждён, что методы анализа бесконечно малых неизбежно приведут к ошибкам.

**Теорема 5.9** (Лагранж). Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на отрезке  $[a, b]$ . Тогда существует внутренняя точка  $x_0$  этого отрезка, для которой

$$f'(x_0) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

Теорему Лагранжа, записанную в виде  $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$ , часто называют *формулой конечных приращений* или *теоремой о среднем значении*.

**Доказательство.** Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - a).$$

Эта функция дифференцируема на отрезке  $[a, b]$  и  $F(a) = F(b) = f(a)$ . Поэтому к функции  $F(x)$  можно применить теорему Ролля (теорема 5.8). В результате получим, что существует внутренняя точка  $x_0$  отрезка  $[a, b]$ , для которой  $F'(x_0) = 0$ , т. е.  $f'(x_0) - \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = 0$ .  $\square$

**ИСТОРИЧЕСКОЕ ЗАМЕЧАНИЕ.** Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) получил формулу конечных приращений в 1797 году как частный случай остаточного члена для формулы Тейлора.

**Задача 5.26.** Функция  $f(x)$  дифференцируема на отрезке  $[a, b]$ , причём  $f'(x) = 0$  для всех точек  $x$  отрезка  $[a, b]$ . Докажите, что функция  $f(x)$  постоянна на отрезке  $[a, b]$ .

**Задача 5.27.** Функция  $f(x)$  дифференцируема на отрезке  $[a, b]$ .

а) Докажите, что эта функция неубывающая (на этом отрезке) тогда и только тогда, когда  $f'(x) \geq 0$  для любой точки  $x \in (a, b)$ .

б) Докажите, что если  $f'(x) \geq 0$  для любой точки  $x \in (a, b)$  и не существует отрезка  $[p, q]$ , содержащегося в  $[a, b]$ , во всех точках которого  $f'$  обращается в нуль, то функция  $f(x)$  строго возрастающая.

**Задача 5.28.** Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы на отрезке  $[a, b]$ . Докажите, что если  $f(a) = g(a)$  и  $f'(x) > g'(x)$  для любой точки  $x$  интервала  $(a, b)$ , то  $f(x) > g(x)$  для любой точки  $x$  интервала  $(a, b)$ .

**Задача 5.29.** Докажите, что если  $x > 0$ , то  $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$  и  $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ .

**Задача 5.30.** Докажите, что если  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , то  $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ .

*Замечание.* Доказательства неравенств из задач 5.29 и 5.30 основаны на том, что из неравенства для производных следует неравенство для функций. Другими словами, из неравенства для функций следует неравенство для первообразных (интегралов). Подход с применением интегралов (по сути дела, эквивалентный) в некотором смысле более естествен: чтобы получить неравенство, нужно вычислить интеграл. Поэтому здесь мы привели только два неравенства. Более подробно этот метод доказательства неравенств обсуждается в § 6.13.

**Задача 5.31.** а) Пусть  $0 < \alpha < 1$  и  $x \geq 0$ . Докажите, что  $x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha$ .

б) Пусть  $a, b, p$  и  $q$  — положительные числа, причём  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Докажите, что  $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ .

**Задача 5.32.** Функция  $f(x)$  дифференцируема на отрезке  $[a, b]$ , причём  $f''(x) > 0$  для всех  $x \in (a, b)$ . Докажите, что эта функция выпуклая.

**Задача 5.33.** Функция  $f$  дифференцируема на отрезке  $[a, b]$ , причём для некоторой константы  $c$  для всех  $x \in [a, b]$  выполняется неравенство  $|f'(x)| \leq c|f(x)|$ . Докажите, что если  $f(x_0) = 0$  для некоторой точки  $x \in [a, b]$ , то  $f(x) \equiv 0$  на  $[a, b]$ .

**Теорема 5.10** (Коши). Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы на отрезке  $[a, b]$ , причём производная  $g'(x)$  не обращается в нуль во внутренних точках этого отрезка. Тогда существует внутренняя точка  $x_0$  отрезка  $[a, b]$ , для которой

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

**Доказательство.** Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)).$$

Ясно, что

$$F'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - f'(x)(g(b) - g(a))$$

и  $F(a) = F(b) = 0$ . Поэтому к функции  $F(x)$  можно применить теорему Ролля (теорема 5.8). В результате получим, что существует внутренняя точка  $x_0$ , для которой

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) - f'(x_0)(g(b) - g(a)) = 0. \quad (5.1)$$

По условию  $g'(x_0) \neq 0$ . Легко также видеть, что  $g(b) - g(a) \neq 0$ , поскольку иначе по теореме Ролля нашлась бы внутренняя точка  $x_1$ , для которой  $g'(x_1) = 0$ . Поэтому равенство (5.1) можно поделить на  $g'(x_0)(g(b) - g(a))$  и получить требуемое.  $\square$

## § 5.6. Неравенства

Приведём ещё несколько задач на доказательство неравенств с помощью производных.

**Задача 5.34.** Докажите, что если  $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ , то  $\alpha \sin \beta < \beta \sin \alpha$  и  $\alpha \operatorname{tg} \beta > \beta \operatorname{tg} \alpha$ .

**Задача 5.35.** Докажите, что если  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , то  $2 \sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha > 3\alpha$ .

**Задача 5.36.** а) Докажите, что  $e^x > 1 + x$  для любого  $x \neq 0$ .

б) Докажите, что  $\frac{1}{n+1} < \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}$  для любого натурального  $n$ .

**Задача 5.37.** Пусть  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ . Докажите, что: а)  $\ln x < x - 1$ ;  
б)  $\ln x > \frac{x-1}{x}$ .

**Задача 5.38.** Докажите, что  $\ln x < n(x^{1/n} - 1) < x^{1/n} \ln x$  для любого положительного числа  $x \neq 1$ .

**Задача 5.39.** Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x$  при  $x > 0$ .

**Задача 5.40.** Докажите, что  $e^x > x^e$  для любого положительного  $x \neq e$ .

**Задача 5.41.** Пусть  $a$  и  $b$  — положительные числа. Докажите, что  $b \cdot 2^a + a \cdot 2^{-b} \geq a + b$ .

**Задача 5.42.** Пусть  $a > b > 0$ . Докажите, что

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2}.$$

**Задача 5.43\*.** Докажите, что

$$\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots + \frac{1}{n} \sin nx > 0$$

при  $0 < x < \pi$ .

**Задача 5.44.** Пусть  $0 < x < \pi/4$ . Докажите, что

$$(\cos x)^{\cos^2 x} > (\sin x)^{\sin^2 x} \quad \text{и} \quad (\cos x)^{\cos^4 x} < (\sin x)^{\sin^4 x}.$$

**Задача 5.45.** Докажите, что если  $x > -1$  и  $x \neq 0$ , то

$$\frac{2|x|}{2+x} < |\ln(1+x)| < \frac{|x|}{\sqrt{1+x}}.$$

## § 5.7. Правило Лопиталья

Правило Лопиталья позволяет вычислять некоторые пределы с помощью производной.

**Теорема 5.11** (правило Лопиталья). Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  удовлетворяют условиям теоремы Коши (теорема 5.10) и, кроме того,  $f(a) = g(a) = 0$ . Тогда если  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ , то  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ .

**Доказательство.** Фиксируем точку  $x \in (a, b]$  и применим теорему Коши к отрезку  $[a, x]$ . В результате получим, что внутри этого отрезка есть точка  $x_1$ , для которой

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}.$$

Если  $x \rightarrow a$ , то  $x_1 \rightarrow a$ . Из этого следует требуемое.  $\square$

**Историческое замечание.** Гийом де Лопиталь (1661–1704) привёл правило нахождения пределов функций в своём учебнике анализа, изданном в 1696 году. Но этот учебник составлен на основе лекций, которые ему читал Иоганн Бернулли (1667–1748). В 1692 году Бернулли уже знал это правило.

**Задача 5.46.** Вычислите с помощью правила Лопиталья предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ .

**Задача 5.47.** Вычислите предел  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$ .

**Задача 5.48.** Вычислите предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ .

**Задача 5.49.** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — многочлены, не имеющие общих корней, причём  $\deg f < \deg g$  и многочлен  $g(x)$  не имеет кратных корней. Докажите, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{x - a_i},$$

где  $a_1, \dots, a_n$  — корни многочлена  $g$  и  $A_i = f(a_i)/g'(a_i)$ .

## § 5.8. Алгебраические и трансцендентные функции

Функцию  $f(x)$  называют *алгебраической*, если существуют многочлены  $P_0(x), \dots, P_n(x)$ , для которых

$$P_0(x)(f(x))^n + P_1(x)(f(x))^{n-1} + \dots + P_n(x) = 0,$$

причём многочлен  $P_0(x)$  не равен тождественно нулю. В противном случае функцию  $f(x)$  называют *трансцендентной*.

**Задача 5.50.** Докажите, что функция  $f(x) = \sin x$  трансцендентная.

**Задача 5.51.** Докажите, что функция  $f(x) = e^x$  трансцендентная.

## § 5.9. Формула Тейлора

Проще всего формула Тейлора выглядит для многочленов; формулируем соответствующее утверждение в виде задачи.

**Задача 5.52.** а) Пусть  $a$  — фиксированное число. Докажите, что любой многочлен  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  можно записать в виде

$$f(x) = A_0 + A_1(x - a) + A_2(x - a)^2 + \dots + A_n(x - a)^n,$$

где  $A_0, A_1, \dots, A_n$  — константы.

б) Докажите, что  $A_0 = f(a)$ ,  $A_1 = f'(a)$ ,  $A_2 = \frac{f''(a)}{2!}$ , ...,  $A_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ .

**Теорема 5.12** (формула Тейлора). Пусть  $a$  — фиксированное число,  $f(x)$  — функция, имеющая производные до порядка  $n + 1$  включительно для любого  $x$  между  $a$  и  $b$  (для некоторого  $b$ ). Тогда если число  $x$  заключено между  $a$  и  $b$  и

$$T(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n,$$

то

$$f(x) - T(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

для некоторого  $\theta$  между  $a$  и  $x$ .

**Доказательство.** Ясно, что  $T(a) = f(a)$ . Далее,

$$T'(x) = f'(a) + \frac{f''(a)}{1!} (x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1},$$

$$T''(x) = f''(a) + \frac{f'''(a)}{1!} (x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!} (x-a)^{n-2},$$

.....

$$T^{(n)}(x) = f^{(n)}(a),$$

$$T^{(n+1)}(x) = 0.$$

Поэтому  $T'(a) = f'(a)$ ,  $T''(a) = f''(a)$ , ...,  $T^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$  и  $T^{(n+1)}(x) = 0$ .

Рассмотрим вспомогательную функцию  $\varphi(x) = f(x) - T(x)$ . Для неё  $\varphi(a) = \varphi'(a) = \varphi''(a) = \dots = \varphi^{(n)}(a) = 0$  и  $\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ .

Рассмотрим ещё вспомогательную функцию  $\psi(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ . Для неё  $\psi(a) = \psi'(a) = \psi''(a) = \dots = \psi^{(n)}(a) = 0$  и  $\psi^{(n+1)}(x) = 1$ . Более того, ни сама функция  $\psi$ , ни её производные до  $(n+1)$ -й включительно не обращаются в нуль в точках, отличных от  $a$ .

Фиксируем точку  $x \neq a$ . Из равенств  $\varphi(a) = \psi(a) = 0$  следует, что  $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)}$ . Поэтому по теореме Коши (теорема 5.10) суще-

ствует точка  $x_1$  между  $a$  и  $x$ , для которой  $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)}$ . Из равенств

$\varphi'(a) = \psi'(a) = 0$  следует, что  $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\varphi'(x) - \varphi'(a)}{\psi'(x) - \psi'(a)}$ . Поэтому по теореме Коши существует точка  $x_2$  между  $a$  и  $x_1$  (а значит, между  $a$  и  $x$ ),

для которой  $\frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)} = \frac{\varphi''(x_2)}{\psi''(x_2)}$ . Продолжая эти рассуждения, получаем

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)} = \frac{\varphi''(x_2)}{\psi''(x_2)} = \dots = \frac{\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})}{\psi^{(n+1)}(x_{n+1})},$$

где точка  $x_{n+1}$  лежит между  $a$  и  $x$ .

Напомним, что  $\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$  и  $\psi^{(n+1)}(x) = 1$ . Пусть  $\theta = x_{n+1}$ .

Тогда  $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = f^{(n+1)}(\theta)$ , т. е.  $f(x) - T(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$ .  $\square$



Многочлен  $T(x)$  называют *многочленом Тейлора* порядка  $n$  функции  $f$  в точке  $a$ .

Разность  $f(x) - T(x)$  называют *остаточным членом*. Остаточный член вида  $\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$  называют *остаточным членом в форме Лагранжа*.

**Историческое замечание.** Брук Тейлор (1685–1731) пришёл к представлению функций с помощью формулы Тейлора в 1715 году. Но Джеймс Грегори (1638–1675) уже знал эту формулу в 1671 году и получил разложения нескольких важных функций. Лагранж получил остаточный член в формуле Тейлора в 1797 году. Он первым оценил точность приближения функции суммой конечного числа членов ряда Тейлора.

**Задача 5.53.** а) Докажите, что модуль разности между  $\sin x$  и

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

не превосходит  $\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$ .

б) Докажите, что модуль разности между  $\cos x$  и

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

не превосходит  $\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ .

в) Докажите, что модуль разности между  $e^x$  и

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

не превосходит  $e^x \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ .

**Замечание.** Приводимые в задаче 5.53 следствия из формулы Тейлора можно получить и более простыми средствами. По этому поводу см. § 6.13.

**Историческое замечание.** Формулы

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad \text{и} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

предложил Исаак Ньютон (1643–1727) в 1669 году.

**Задача 5.54.** Докажите, что если  $(n+1)$ -я производная функции  $f$  тождественно равна нулю, то  $f$  — многочлен степени не выше  $n$ .

## § 5.10. Равномерная сходимость дифференцируемых функций

Начнём с двух задач.

**Задача 5.55.** Докажите, что поточечно сходящаяся последовательность функций, дифференцируемых на отрезке, может сходиться к не дифференцируемой функции.

**Задача 5.56.** Пусть последовательность дифференцируемых функций  $f_n$  сходится на отрезке к дифференцируемой функции  $f$ . Докажите, что при этом последовательность  $\{f'_n\}$  может не сходиться к  $f'$ .

Но при определённых условиях последовательность дифференцируемых функций сходится к дифференцируемой функции и при этом последовательность производных сходится к производной.

**Теорема 5.13.** Если последовательность непрерывно дифференцируемых функций  $f_n$  на интервале  $(a, b)$  сходится в некоторой точке  $x_0$ , а последовательность их производных  $f'_n$  равномерно сходится на этом интервале, то последовательность функций  $f_n$  равномерно сходится на интервале к непрерывно дифференцируемой функции  $f$ , причём  $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$  для всех  $x \in (a, b)$ .

**Доказательство.** Фиксируем точку  $c \in (a, b)$  и положим  $g_n(x) = f'_n(x) - f'_n(c)$  при  $x \neq c$  и  $g_n(x) = f'_n(c)$  при  $x = c$ . Тогда

$$f_n(x) = f_n(c) + (x - c)g_n(x) \quad (5.2)$$

для всех  $x \in (a, b)$ . Покажем, что для любого  $c$  последовательность  $\{g_n\}$  сходится равномерно на интервале  $(a, b)$ . Пусть задано  $\varepsilon > 0$ . Согласно теореме о среднем значении (теорема 5.9) для точки  $x \in (a, b)$ ,  $x \neq c$ , можно выбрать точку  $\xi$  между  $x$  и  $c$  так, что

$$g_n(x) - g_m(x) = \frac{f_n(x) - f_m(x) - (f_n(c) - f_m(c))}{x - c} = f'_n(\xi) - f'_m(\xi).$$

Последовательность  $\{f'_n\}$  сходится равномерно на  $(a, b)$ , поэтому можно выбрать  $N$  так, что если  $n, m \geq N$ , то  $|g_n(x) - g_m(x)| < \varepsilon$ . Для  $x = c$  это неравенство тоже выполняется, поскольку  $g_n(c) = f'_n(c)$ . Равномерная сходимость последовательности  $\{g_n\}$  доказана.

Докажем теперь, что последовательность  $\{f_n\}$  сходится равномерно на интервале  $(a, b)$ . Запишем равенство (5.2) для  $c = x_0$ :

$$f_n(x) = f_n(x_0) + (x - x_0)g_n(x).$$

Из этого равенства следует равномерная сходимость последовательности  $\{f_n\}$ , поскольку последовательность чисел  $\{f_n(x_0)\}$  сходится

(по условию) и последовательность функций  $\{g_n\}$  сходится равномерно.

Снова фиксируем точку  $c \in (a, b)$  и положим  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  и  $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$ . Требуется доказать, что

$$f'(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(c). \quad (5.3)$$

Последовательность  $\{g_n\}$  сходится равномерно, и каждая функция  $g_n$  непрерывна в точке  $c$ , поэтому функция  $g$  непрерывна в точке  $c$ . Кроме того,  $g_n(c) = f'_n(c)$ . Следовательно, правую часть равенства (5.3) можно записать в следующем виде:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(c) = g(c) = \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

Ясно также, что

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x).$$

Поэтому левую часть равенства (5.3) можно записать в следующем виде:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} g(x). \quad \square$$

## § 5.11. Промежуточные значения производной

Производная всюду дифференцируемой функции может не быть непрерывной. Рассмотрим, например, функцию  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$  при  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ . Если  $x \neq 0$ , то

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(\frac{1}{x}\right)' \cos \frac{1}{x} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Для вычисления производной в нуле можно воспользоваться непосредственно определением производной. Ясно, что  $\left| \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \right| = \left| t \sin \frac{1}{t} \right| \leq |t|$  при  $t \neq 0$ , поэтому  $f'(0) = 0$ . Таким образом, функция  $f'(x)$  всюду определена, но в точке 0 она не непрерывна, поскольку функция  $\cos \frac{1}{x}$  не имеет предела при  $x \rightarrow 0$ .

Тем не менее, производная функции, дифференцируемой на отрезке, принимает все промежуточные значения.

**Теорема 5.14** (Дарбу). Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на отрезке  $[a, b]$  и  $f'(a) < \lambda < f'(b)$ . Тогда  $f'(x) = \lambda$  для некоторой точки  $x \in (a, b)$ .

Аналогичное утверждение верно и в том случае, когда  $f'(a) > f'(b)$ .

**Доказательство.** Пусть точка  $c$  — середина отрезка  $[a, b]$ . Рассмотрим на отрезке  $[a, b]$  две непрерывные кусочно линейные функции  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$ : если  $a \leq t \leq c$ , то  $\alpha(t) = a$  и  $\beta(t) = 2t - a$ , а если  $c \leq t \leq b$ , то  $\alpha(t) = 2t - b$  и  $\beta(t) = b$  (рис. 5.1). Ясно, что при  $a < t < b$

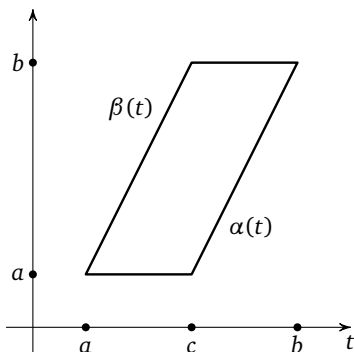


Рис. 5.1.

выполняются неравенства  $a \leq \alpha(t) < \beta(t) \leq b$ . Поэтому можно рассмотреть непрерывную функцию

$$g(t) = \frac{f(\beta(t)) - f(\alpha(t))}{\beta(t) - \alpha(t)}$$

на интервале  $(a, b)$ . Ясно, что  $g(t) \rightarrow f'(a)$  при  $t \rightarrow a$  и  $g(t) \rightarrow f'(b)$  при  $t \rightarrow b$ . Поэтому функцию  $g(t)$  можно доопределить до функции, непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , и из теоремы о промежуточном значении (теорема 3.5) следует, что на интервале  $(a, b)$  существует точка  $t_0$ , для которой  $g(t_0) = \lambda$ , т. е.

$$\frac{f(\beta(t_0)) - f(\alpha(t_0))}{\beta(t_0) - \alpha(t_0)} = \lambda.$$

Поэтому по формуле конечных приращений (теорема 5.9) существует точка  $x \in (\alpha(t_0), \beta(t_0))$ , для которой  $f'(x) = \lambda$ .  $\square$

**ИСТОРИЧЕСКОЕ ЗАМЕЧАНИЕ.** Гастон Дарбу (1842–1917) доказал теорему 5.14 в 1875 году.

## § 5.12. Многочлены Чебышёва

Определение многочленов Чебышёва основано на том, что  $\cos n\varphi$  полиномиально выражается через  $\cos \varphi$ , т. е. существует такой мно-