Предисловие

Рассмотрение с помощью этого метода ещё не является доказательством; однако получить при помощи этого метода представление об исследуемом, а затем найти и само доказательство, гораздо удобнее, чем производить изыскания ничего не зная.

Архимед. Послание Эратосфену. О механических теоремах.

Можно рассматривать задачи в духе известного высказывания: «геометрия — это искусство правильно рассуждать на неправильном чертеже». Но иногда имеет смысл подходить к геометрии как к физике: точный чертёж — это геометрический эксперимент, он позволяет разобраться в трудном утверждении, относящемся к целому семейству линий или запутанной конфигурации, подметить какую-то новую закономерность.

Н. Б. Васильев, В. Н. Гутенмахер. Прямые и кривые.

Экспериментальная математика. Есть подход к решению задач по математике, который можно назвать экспериментальным. Он состоит в том, что решающий рассматривает частные случаи предложенной конструкции, пытается угадать стоящую за ними закономерность, а потом доказать её в общем виде [13, 20]. В арифметике, алгебре и комбинаторике это естественно делать с помощью перечней, графиков и таблиц [12]. В геометрии раньше это было возможно с помощью рисования нескольких чертежей или рассмотрения специальных случаев — правильный треугольник вместо произвольного и т. д. [9, 11]. В последние десятилетия появилось новая возможность: в программах динамической геометрии мы можем нарисовать *всего один* подвижный чертёж, а потом движением мыши получить из него целую серию «обычных» статических чертежей [8]! Тем самым мы легко получаем серию частных случаев, а также видим все возможные варианты конфигурации (остроугольный/тупоугольный треугольник, выпуклый/невыпуклый четырёхугольник/самопересекающаяся ломаная и т. д.), часть из которых легко потерять при статическом рассмотрении.

Роль программ динамической геометрии при решении задач по геометрии можно сравнить с ролью экспериментальной установки в физической лаборатории: с их помощью *школьник может взаимодействовать с предметом напрямую*, без посредства учителя или учебника. Он легко может сам подмечать закономерности, ставить вопросы, выдвигать и проверять гипотезы.

В 1—6 классах школьники получают опыт экспериментального подхода к математике (рассуждение на примерах, обобщение наблюдений).

При изучении геометрии начиная с 7 класса ведущим становится теоретический подход (введение аксиом, определений и доказательство теорем). Однако *продуктивнее не конфликтовать с прежним опытом, а использовать его*, т. е. продолжать развивать и экспериментальные навыки наряду с теоретическими [19].

Благодаря программам динамической геометрии роль математического эксперимента при изучении геометрии может значительно возрасти. В России многие учителя и деятели олимпиадного движения уже активно пользуются такими программами, но они ещё недостаточно проникли в школьную среду, часто используются лишь для иллюстрирования фактов и т. д.

Цель этой книги — помочь учителям ввести экспериментальный подход в геометрии, дать им набор подходящих для этого задач и приёмов исследования.

О подходящих задачах. «Задачи, при решении которых можно и полезно использовать компьютер, должны иметь другую структуру; соответственно, необходимо составлять новые подборки задач и разрабатывать новые методики обучения... При правильном подходе к методике его использования компьютер помогает сделать процесс обучения более интенсивным» [7].

Подходящими я здесь называю задачи, удовлетворяющие двум условиям:

а) они задают подвижный чертёж, который легко построить и по которому нетрудно выдвинуть гипотезу;

б) их трудно решить без подвижного чертежа.

Такими качествами обладают многие традиционные задачи по геометрии, данные в *открытой формулировке* [16, 17], т. е. без готового утверждения (нахождение доказываемого утверждения является в этом случае частью задачи). Здесь это и задачи на экстремум (занятия 4 и 8), и задачи на ГМТ (занятия 3 и 5), и задачи на инвариант (занятие 6).

Также подходящими являются некоторые сложные «традиционные» задачи на нахождение, доказательство или построение, в которых подвижный чертеж помогает обнаружить вспомогательное утверждение, позволяющее решить задачу.

Но широкий инструментарий программ позволяет добавлять и новые типы заданий, например: построить подвижный чертёж; построить семейство линий и их огибающую; поработать с линией, которая не является прямой или окружностью; выбрать и изучить подходящие простые случаи в заданном семействе. В этой книге довольно много таких заданий, часть из них названы *демонстрациями*. Они могут быть весьма содержательными, а их решение развивающим, но без инструментария программ динамической геометрии они были почти недоступны рядовому школьнику. Теперь они постепенно проникают в обучение геометрии.

Когда опытный математик рисует на бумаге чертёж, он воспринимает его динамически — вместе с его поведением. Научить этому навыку школьника и помогает работа с новыми типами задач в программах динамической геометрии.

Этапы решения. Полный цикл решения задачи в этой книге выглядит так.

А. Прочитать условие.

Б. Построить подвижный чертёж.

В. Провести эксперимент.

Г. Выдвинуть гипотезу.

Д. Проверить её (подкрепить или же опровергнуть и начать искать новую гипотезу).

Е. Доказать гипотезу.

Занятия 1—3 соответствуют раннему этапу изучения геометрии, поэтому в них задачи ограничиваются конструктивным уровнем и «инструментальной» проверкой. Точнее, в занятии 1 решение ограничивается этапами А—В (в роли эксперимента выступает проверка чертежа), а в занятиях 2 и 3 — этапами А—Д.

Начиная с занятия 4 в задачах требуется полный цикл решения с доказательствами (кроме задач, помеченных *). Соответственно, в занятиях 4—10 у каждой задачи есть две части решения. Первая часть называется *экспериментом*, она охватывает этапы А—Д — описывается построение подвижного чертежа, выдвигается и проверяется гипотеза, высказываются разные неформальные соображения. Вторая часть называется собственно *решением*, она соответствует этапу Е, т. е. решению задачи в классическом смысле.

Выдвижение и проверка гипотезы[1] — ключевые этапы, остановимся на них подробнее. Гипотезы обычно выдвигают на основании *непосредственных наблюдений* (вам показалось, что точка C — середина отрезка AB). Здесь важно сделать чертёж хорошо «читаемым». Первый шаг проверки — *выполнить более точное измерение/построение* (вы измеряете и сравниваете отрезки AC и CB или строите середину отрезка AB и проверяете её совпадение с C). Второй шаг проверки — *охватить большее число случаев* (вы варьируете отрезок AB и проверяете, что точка C по-прежнему остаётся его серединой).

Зачем нужно проверять гипотезы? Во-первых, чтобы сразу забраковать неверную гипотезу и не тратить время на попытки её доказать. Во-вторых, качественная проверка гипотезы часто приводит к идее решения (дополнительным построениям, обнаружению важных случаев, уточнению гипотезы и т. д.).

[1]Заметим, что на олимпиадах по информатике проверка алгоритмов, предложенных школьниками, не является математической в строгом смысле этого слова. Вместо этого алгоритмы тестируют на разнообразном массиве входных данных. Это похоже на проверку гипотез, предлагаемую в данной книге.

Вот яркий пример обманной гипотезы, который полезно показать школьникам. Построим выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, стороны которого равны, но не параллельны. Проведём три его большие диагонали AD, BE и CF. Визуально они пересекаются в одной точке, при увеличении масштаба тоже. И только на очень большом увеличении видно, что диагонали образуют маленький треугольник. См. другие примеры обманных гипотез в демонстрациях после задач 3.7 и 6.2.

Отметим, что в программах международного бакалавриата по математике предусмотрен специальный вид деятельности — Investigating patterns (поиск закономерностей). Работа с математическими фактами там описывается тремя глаголами:

— verify (проверить частный случай);

— justify ($\approx$ обосновать, подтвердить);

— prove (доказать).

Наше подкрепление гипотез примерно соответствует стадии justify.

Команды/инструменты и модели. Широко распространён подход, при котором школьники проводят эксперименты на выданных им моделях — например, [web8, web9]. В этой книге подход другой — *школьники сами строят подвижный чертёж по условию задачи*.

В задачах на построение циркулем и линейкой разрешается использовать лишь те построения, которые мы предварительно сконструировали из элементарных (см., например, [3], так же устроена программа «Евклидия» [web4]). Эта традиция соответствует аксиоматическому построению курса геометрии, при котором можно ссылаться только на доказанные теоремы. В этой книге для построения подвижных чертежей *разрешается пользоваться всеми доступными командами/инструментами программ динамической геометрии*, в том числе и теми, которые не сводятся к построениям циркулем и линейкой (например, можно выполнить трисекцию угла или построить правильный семиугольник). Это соответствует «инженерному» подходу, при котором способы построения являются лишь средством, ускоряющим продвижение к цели — изучению свойств подвижного чертежа.

План курса. Задачи сгруппированы по занятиям, в каждом из которых развиваются особые экспериментальные навыки и почти в каждом вводятся новые команды/инструменты программ. Подробности показаны в таблице.

Номер и тема занятия	Классы	Геометрическое содержание	Новые команды/инструменты программ	Новые экспериментальные навыки
1. Строим подвижные чертежи	6—7	Геометрические конструктивы. *Формулировок и доказательств нет*	Понятие предка и потомка. Простейшие построения	Выделить предки и потомки, построить подвижный чертёж, проверить его
2. Угадываем и достраиваем	6—7	Геометрические конструктивы, выражение новых элементов через данные. *Формулировок и доказательств нет*	Измерение расстояний и площадей, подмена точки	Создать пробную прямую (точку), подобрать нужное положение, закрепить, проверить
3. Строим траектории точек и линий	7	Геометрические конструктивы, выражение новых элементов через данные. *Появляются формулировки, доказательств нет*	След точки и линии	Построить траекторию точки, выдвинуть гипотезу о её виде, проверить гипотезу построениями
4. Ищем экстремумы-1	7—8	Неравенство треугольника, перпендикуляр короче наклонной, диагонали прямоугольника равны, *«неравенство резинки». *Появляются доказательства*	Арифметические действия с измеренными величинами	Выбрать подходящий чертёж в серии, найти особенности, выделяющие его среди других. Проверить гипотезу измерениями и построениями
5. Оживляем траектории	8—9	Параллелограмм, средняя линия треугольника, множество точек, из которых данный отрезок виден под прямым (*тупым, острым) углом	Оживление следа точки и линии: динамический след или локус	Построить траекторию подвижной точки или линии, найти огибающую. Проверить гипотезу рассмотрением многих случаев

6. Ищем взаимосвязи и инварианты	8—9	Четырёхугольники, средние линии треугольника и трапеции, площадь треугольника через основание и высоту, подобие, *тангенс угла в прямоугольном треугольнике	Измерение углов	Найти общее свойство серии чертежей
7. Вокруг задачи о котёнке	9	Вписанные углы, подобие, обобщённая теорема синусов. Вводится понятие эллипса как сжатой окружности	Ползунки	Выделить нужный случай или множество случаев
8. Ищем экстремумы-2	9	Осевая симметрия и сдвиг, вписанные углы, обобщённая теорема синусов, метод координат	Перенос на вектор, визуализация переменных величин	Построить найденную конфигурацию, прийти к доказательству
9. Освобождаем точку	9	Движения плоскости и гомотетия	Инструменты движений и гомотетии	Освободить точку, построить её траекторию, придумать и реализовать преобразование
10. Вокруг конструкций. Конференция	9	Движения и гомотетия, теорема косинусов, векторы, средние линии, счёт углов		Найти несколько общих свойств серии чертежей, взаимосвязи между конструкциями

Видно, что занятия не очень «плотно» привязаны к конкретным темам курса геометрии (см. третий столбец). Это не только недостаток, но и достоинство. Во-первых, школьникам полезно иногда встречаться на одном занятии с несколькими темами — ведь на олимпиадах и экзаменах им приходится это делать. Во-вторых, на каждом занятии вполне допустимы одна-две задачи «на вырост», в которых школьник может построить подвижный чертёж и сформулировать гипотезу, но ещё не имеет средств её доказать. К ним полезно возвращаться позже, опираясь на выдвинутые гипотезы. Такой подход даёт учителю возможность манёвра, особенно если на кружок приходят ученики из разных классов с разной программой. Задачи, которые для большей части группы будут «на вырост», *помечаются знаком* *.

Организация занятий. Каждое занятие рассчитано на 90 минут. Занятия удобно проводить в компьютерном классе или с набором ноутбуков. Первые 15—20 минут компьютеры выключены, но включён проектор. Учитель демонстрирует на экране новые инструменты программы, которые понадобятся на занятии. Затем строит модель, проводит эксперимент и обсуждает решения «задач для разбора». Далее можно действовать двумя способами.

Первый способ: школьники получают листочки с задачами для самостоятельного решения и решают их за компьютерами, а учитель принимает задачи, подсказывает тем, кто попал в тупик. Школьник может за каждую задачу получить два «плюса» — за эксперимент и за решение. Если школьник ошибся в решении, учитель указывает ему на ошибку или пробел в рассуждениях. А если школьник выдвигает неверную гипотезу, то учитель советует найти опровергающую её конфигурацию. Опровержение гипотезы, полученное учеником самостоятельно, особенно ценно.

В конце занятия полезно подвести итог и обсудить решения одной-двух задач, вызвавших сложности. Можно продемонстрировать на экране интересный чертёж или оригинальное решение, возникшее по ходу занятия.

Некоторым школьникам полезно чёткое разграничение: первый час они работают за компьютерами, строят подвижные чертежи, выдвигают и проверяют гипотезы. На второй час выключают компьютер и доказывают полученные результаты в тетради.

Второй способ: листки не выдавать, а формулировать задачи по одной. Учитель ходит по классу, смотрит по чертежам, правильно ли поняли задачу, помогает построить. Принимает решение у пары самых быстрых учеников, затем даёт остальным общую подсказку. Принимает ещё четыре-пять решений. Тем, кто сдал, индивидуально даёт дополнительную задачу (часто это второй пункт из этой же задачи или какое-то её обобщение, иногда отдельная сложная задача). Также сдавшие могут помогать учителю принимать задачи у остальных. Затем учитель разбирает задачу со всеми и объявляет следующую. Получается, что за пару все ученики подумали над костяком в четыре-пять основных задач, решили их или услышали разбор, т. е. получили гарантированный минимум. Самые сильные успели подумать над дополнительными вопросами.

Этот способ гибче первого — можно оперативно разобрать со всеми типичную ошибку или показать удобный инструмент к конкретной задаче. Пожалуй, для более сильного и самостоятельного класса больше подходит форма с листком — ребята не тормозят друг друга, выполняют самостоятельные исследования. А для менее уверенного класса или учителя-новичка лучше подходит форма с выдачей по одной задаче — учитель лучше контролирует процесс.

Иногда в группе встречаются один-два школьника (как правило, очень сильные), которые не любят проводить эксперименты, а хотят сразу доказывать «на бумаге». Можно дать им индивидуально более сложные задачи (например, из списка дополнительных задач), которые без подвижных чертежей им будет трудно осилить.

Программы. Сейчас в России популярны три программы динамической геометрии: «Геогебра» [web1], «Математический конструктор» [web2] и «Живая математика» [web3]. *Приведённые здесь наборы задач можно решать в любой из трёх программ.* В конце книги приведён словарик основных команд и инструментов для всех трёх программ.

Благодарности. При написании книги автор многократно прибегал к помощи С. А. Беляева, В. Н. Дубровского, К. А. Кнопа, Г. А. Мерзона, А. А. Чеснокова и Д. Э. Шноля. Т. Н. Ильичёва и Н. М. Нетрусова провели несколько занятий по разделам книги. А. А. Гаража, А. А. Деева, В. А. Иевлева и Е. А. Коноваленко вычитали текст. Е. В. Бакаев, А. Г. Банникова, В. М. Бусев, М. А. Волчкевич, А. Г. Зарембо, А. А. Заславский, А. В. Пантуев, И. Я. Сиротовский, Ю. Н. Торхов, А. В. Шкловер и Ю. М. Эдлин дали ценные советы. Традиционная большая благодарность — редакторам серии А. Д. Блинкову и А. В. Шаповалову.

Поддержка курса. По ссылке

`https://www.geogebra.org/m/qsqknnua`

можно найти электронное приложение к книге — подборку подвижных чертежей (в «Геогебре») ко всем основным задачам. Также для поддержки курса работает группа в телеграме: https://t.me/+R9GfuudXr_DA6NLw

По итогам занятий и отзывов на первое издание книга была переработана: добавлены новые занятия 2, 5 и 7, переписано занятие 3, ставшее занятием 9, внесён ряд новых задач в другие занятия, обновлены словарики. Также появились подсказки в раздаточном материале, приложения и тематический указатель.

Автор будет рад отзывам, направляемым на электронный адрес sgibnev@mccme.ru или в группу [web10]. Каких разделов не хватает в книге? Какие задачи можно добавить? Какие решения улучшить?

На рисунках к экспериментам *точки, которые по смыслу задачи надо двигать, изображены «пустыми», а остальные — закрашенными*.