УДК 511
ББК 22.13
Т80

Трушин, Борис Викторович.

Т80 Математика с Борисом Трушиным. Теория чисел: с нуля до теоремы Эйлера / Борис Трушин. — Москва : Эксмо, 2024. — 304 с. — (Математика с Борисом Трушиным).

ISBN 978-5-04-179677-8

Борис Трушин почти 25 лет учит математике школьников и студентов, является соавтором школьных учебников по алгебре и уже 7 лет ведет одноименный YouTube-канал по околошкольной математике.

Вторая книга автора плавно погружает читателя в теорию чисел и позволяет освоить азы этого интересного раздела математики без каких-либо предварительных знаний. Задачи на теорию чисел часто встречаются на математических олимпиадах и ЕГЭ. Вы пройдете увлекательный путь с самых азов, поймете, откуда взялись свойства умножения и почему работает алгоритм деления в столбик, а закончите теоремой Эйлера.

УДК 511
ББК 22.13

ISBN 978-5-04-179677-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Всем привет! Меня зовут Борис Трушин, и я учитель математики. Я преподаю математику школьникам, студентам и учителям уже 25 лет, а последние семь лет веду довольно популярный YouTube-канал «Борис Трушин» по околошкольной математике.

Некоторые разделы и задачи из этой книги можно найти в виде видеороликов на моём канале. Специально для тех, кому проще воспринимать информацию через видео, я снабдил книгу QR-кодами со ссылками на соответствующие ролики.

Книга рассчитана на широкий круг читателей – от шестиклассников до людей, давно окончивших школу. В ней я собрал многолетний опыт преподавания теории чисел школьникам на уроках, кружках и факультативах. Книга позволяет познакомиться с теорией чисел и освоить азы этого интересного раздела математики без каких-либо предварительных знаний.

В этой книге я попытался, начав с базовых принципов работы с целыми числами, пройти путь до содержательных теорем, по дороге осваивая мно-

жество методов решения задач. А в конце вы даже узнаете одно из важных приложений теории чисел к «реальной жизни».

Плавное погружение в теорию чисел начнётся с самых азов: вы узнаете, откуда взялись свойства умножения и почему работает алгоритм деления в столбик. Затем освоите алгоритм Евклида, основную теорему арифметики, линейные диофантовы уравнения, арифметику остатков и при этом научитесь решать разнообразные «олимпиадные» задачи!

Некоторые разделы этой книги могут оказаться для вас сложными. Не расстраивайтесь, если не все доказательства будут вам понятны с первого раза. Некоторые сложные рассуждения можно пропустить при первом прочтении и вернуться к ним, когда будете готовы. Это никак не повлияет на общее понимание остального текста.

А если вы уже немного знакомы с теорией чисел, то некоторые разделы можете смело пропускать, останавливаясь лишь на задачах, которые вызовут у вас интерес. Задач же будет много – начиная от простых упражнений, заканчивая сложными многоходовыми заданиями.

Старайтесь самостоятельно решать все предложенные здесь задачи. Но не переживайте, если не всё сразу получается. Можно отложить задачу на пару дней, а потом подумать над ней ещё. В любом случае, у вас всегда будет возможность посмотреть подробное решение, которое можно найти для каждой задачи в конце книги.

Те, кто разберётся со всеми изложенными здесь фактами и методами, решит или хотя бы поймёт ре-

шения всех предложенных задач, уже будет понимать теорию чисел на достаточно высоком уровне. Кому-то для этого будет достаточно пары недель, а у кого-то может уйти и пара лет.

Приятного вам чтения!

Post scriptum. Хочу выразить слова благодарности всем тем, кто учил меня математике в школе и в вузе. Всё, что я умею в математике и знаю о её преподавании, – всё благодаря этим людям.

В первую очередь это мой отец, Трушин Виктор Борисович, без которого я никогда бы не узнал и не полюбил математику, и Петрович Александр Юрьевич – мой школьный учитель алгебры, который 30 лет назад познакомил меня с теорией чисел.

А также Терёшин Дмитрий Александрович, Карасёв Роман Николаевич, Подлипский Олег Константинович, Чубаров Игорь Андреевич, Балашов Максим Викторович, Курочкин Сергей Владимирович, Бесов Олег Владимирович, Половинкин Евгений Сергеевич и ещё пара десятков потрясающих учителей и преподавателей, у которых мне посчастливилось когда-то учиться.

Спасибо вам, без вас не было бы не только этой книги, но и меня как учителя математики!

Кроме того, мне хочется отдельно поблагодарить Константина Кнопа и Тагира Валеева за то, что они взялись первыми прочитать эту рукопись перед публикацией. Их предложения и советы помогли улучшить некоторые разделы этой книги.

29 января 2024 года
Борис Трушин

ГЛАВА 1

ДЕЛИМОСТЬ

Теория чисел – довольно специфический раздел математики. Вначале он смущает школьников и студентов тем, что нужно забыть про существование всех чисел, кроме целых. В теории чисел нет числа *полтора*. Там на вопрос: «Можно ли три яблока разделить поровну на двоих?» ответом будет: «Нельзя, потому что три не делится на два». В этом смысле единицу лучше воспринимать не как яблоко, а как камень – что-то атомарное, что дальше уже не делится.

Так что, да, забудьте на время про все числа, кроме целых. Более того, мы даже за рамки натуральных чисел редко будем выходить.

Напомню, что *натуральными* называются[1] числа, которые образуются при счёте:

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad \ldots$$

[1] В ряде математических дисциплин (особенно тех, которые находятся на стыке с информатикой и компьютерными науками) число 0 тоже считается натуральным, но мы будем придерживаться классического определения.

А *целыми* называются все натуральные числа, число 0 и все числа, противоположные натуральным:

$$-1, \quad -2, \quad -3, \quad -4, \quad -5, \quad \ldots$$

Прежде чем переходить к самому важному понятию теории чисел – делимости, давайте начнем с азов и вспомним, что такое умножение и какие у него есть свойства.

КАК РАБОТАЕТ УМНОЖЕНИЕ

Из начальной школы мы знаем, как складывают числа, и понимаем, что если нам нужно сложить несколько одинаковых чисел, то компактнее это записывается через умножение:

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 5.$$

То есть $3 \cdot 5$ – это буквально три, взятое пять раз.

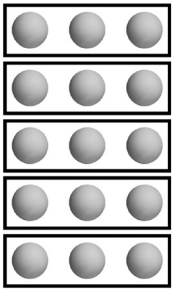
Так вот, у умножения есть ряд важных свойств, которые в школе называются *переместительным*, *сочетательным* и *распределительным* законами умножения. Давайте попробуем разобраться, откуда они взялись.

Переместительный закон умножения, или, как говорят математики, *коммутативность*, – это то самое правило, которое вы заучили в начальной школе как «от перемены мест множителей произведение не меняется».

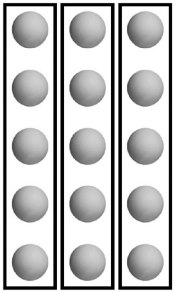
Но не все задумываются о том, почему это правило работает. Почему $3 \cdot 5$ и $5 \cdot 3$ – это одно и то же?

Почему 3 + 3 + 3 + 3 + 3 равно 5 + 5 + 5? Понятно, что можно вычислить каждую из сумм, и оба раза получить 15. Но как заранее понять, что получается одно и то же, не выполняя сложение?

Давайте рассуждать. Что такое $3 \cdot 5$? Это три, взятое пять раз. Изобразим это в виде пяти наборов из трёх шаров:



Но количество получившихся шаров можно было посчитать и по-другому – сгруппировав их по пять:



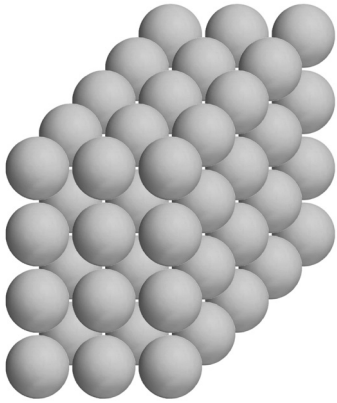
А это и означает, что пять, взятое три раза, – это то же самое, что три, взятое пять раз.

Сочетательный закон умножения, или *ассоциативность*, – это правило о том, что при умножении трёх множителей порядок умножения не влияет на результат.

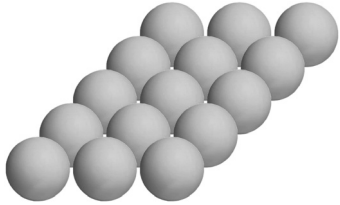
Давайте поймем, например, почему

$$(3 \cdot 5) \cdot 4 = 3 \cdot (5 \cdot 4).$$

Представим себе несколько шаров, сложенных в виде прямоугольного параллелепипеда размером $3 \times 5 \times 4$:



Сколько здесь шаров? С одной стороны, здесь четыре слоя,



в каждом из которых $3 \cdot 5$ шаров. То есть здесь всего $(3 \cdot 5) \cdot 4$ шаров.

Но, с другой стороны, все шары можно разбить на горизонтальные ряды.

А рядов таких всего $5 \cdot 4$ штук. Поэтому общее число шаров – это $5 \cdot 4$ раз по три шара, то есть $3 \cdot (5 \cdot 4)$.

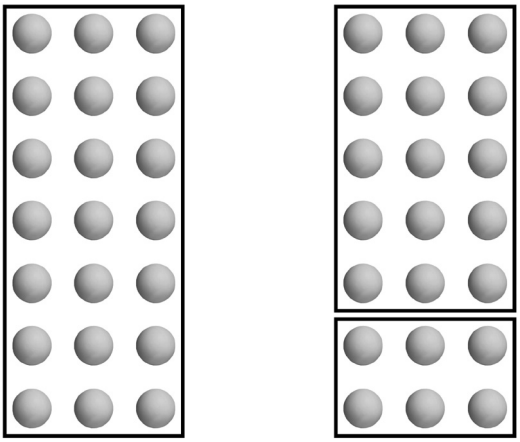
В итоге мы двумя способами посчитали одно и то же общее количество шаров. Значит,

$$(3 \cdot 5) \cdot 4 = 3 \cdot (5 \cdot 4).$$

Распределительный закон умножения, или *дистрибутивность*, – это то, что школьники называют правилом раскрытия скобок:

$$3 \cdot (5 + 2) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2.$$

Давайте опять с помощью шаров поймем, почему, например, $3 \cdot 7 = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2$:



Вместо того чтобы сразу взять семь раз по три шара, можно взять пять раз по три, а потом ещё два раза по три. Вот и всё!

Этих трёх свойств достаточно, чтобы уметь делать все те преобразования выражений, которые вы учились делать в начальной школе.

Например, правило для раскрытия скобок в выражениях вида $(a+b) \cdot (c+d)$ – «нужно каждое слага-

емое из первой скобки умножить на каждое слагаемое из второй и сложить результаты этих произведений» – следует из распределительного и переместительного законов:

$$(a+b)\cdot(c+d)=(a+b)\cdot c+(a+b)\cdot d;$$

(распределительный закон)

$$(a+b)\cdot c+(a+b)\cdot d=c\cdot(a+b)+d\cdot(a+b);$$

(переместительный закон)

$$c\cdot(a+b)+d\cdot(a+b)=(c\cdot a+c\cdot b)+(d\cdot a+d\cdot b);$$

(распределительный закон)

$$(c\cdot a+c\cdot b)+(d\cdot a+d\cdot b)=a\cdot c+b\cdot c+a\cdot d+b\cdot d.$$

(переместительный закон)

Но когда мы уже понимаем, как работает умножение и какие у него есть свойства, то можно сразу писать

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+b\cdot c+a\cdot d+b\cdot d.$$

Более того, обычно, для краткости записи, в буквенных выражениях знак умножения вообще не пишут:

$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd.$$

Давайте потихоньку и к этому привыкать.

ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Тот способ записи чисел, к которому мы все привыкли с детства, называется *десятичной системой*

счисления. В ней для записи числа используется десять знаков: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, которые называются *арабскими цифрами*.

Считается, что количество цифр связано с количеством пальцев на руках у человека. Людям было удобно считать на пальцах десятками: досчитал до десяти – отложил камешек, ещё раз досчитал – отложил ещё один, и так далее. И если в результате подсчёта у тебя, например, пять отложенных камешков и семь загнутых пальцев, значит, ты досчитал до 57.

Когда камешков становится много, то заменяем десять камешков на большой камень. Теперь каждый большой камень символизирует десять десятков, то есть сотню. И так далее.

Но десятичная система не единственная, которую использовало человечество. У многих народов имела хождение *двенадцатеричная система*. Она возникла, когда люди считали предметы не загибая пальцы, а указывая большим пальцем руки на фаланги остальных четырёх пальцев той же руки.

Именно поэтому во многих языках сохранилось и используется до сих пор специальное слово «дюжина» – аналогичное слову «десяток» из десятеричной системы.

Даже ещё в двадцатом веке в Англии применялась двенадцатеричная денежная система: один шиллинг был равен дюжине пенни. Более того, двенадцатеричная система до сих пор используется в английской системе мер. Так, например, один фут равен дюжине дюймов.

Не говоря уже о том, что циферблат часов разделён на 12 часов, а год – на 12 месяцев.

Свои отголоски в современном мире имеет и придуманная более четырёх тысяч лет назад шумерами *шестидесятеричная система счисления*, которая, по-видимому, являлась результатом наложения двух более древних систем счисления – двенадцатеричной и пятеричной.

Так, например, в одном часе шестьдесят минут, а в одной минуте – шестьдесят секунд. Более того, деление на минуты и секунды принято и при измерении углов – там тоже в одном градусе шестьдесят минут, а в одной минуте шестьдесят секунд. Например, угол в один радиан равен примерно 57°17′45′′ – 57 градусам 17 минутам и 45 секундам.

Но давайте вернёмся к привычной нам десятеричной системе счисления. Вот есть, например, число

23 456.

За что отвечает каждая его цифра? В этом числе цифра 6 – это количество единиц, цифра 5 – количество десятков, цифра 4 – количество сотен, цифра 3 –

количество тысяч, а цифра 2 – десятков тысяч.

Иными словами,

$$\begin{aligned}23\,456 &= 20\,000 + 3000 + 400 + 50 + 6 = \\ &= 2 \cdot 10\,000 + 3 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6 = \\ &= 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6.\end{aligned}$$

Именно поэтому числа, записанные в десятеричной системе, легко умножать на десять:

$$\begin{aligned}23\,456 \cdot 10 &= (2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6) \cdot 10 = \\ &= 2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 = \\ &= 234\,560.\end{aligned}$$

Благодаря этому важному свойству и распределительному закону умножения работает хорошо вам знакомый метод умножения в столбик.

УМНОЖЕНИЕ В СТОЛБИК

Давайте вспомним метод умножения в столбик и наконец поймем, почему он работает. Пусть нам нужно, например, умножить 1234 на 23 456:

$$\begin{aligned}&1234 \cdot 23\,456 = \\ &= 1234 \cdot (2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6) = \\ &= 1234 \cdot 6 + 1234 \cdot 5 \cdot 10 + 1234 \cdot 4 \cdot 10^2 + \\ &\quad + 1234 \cdot 3 \cdot 10^3 + 1234 \cdot 2 \cdot 10^4.\end{aligned}$$

А как посчитать, чему равно, например, произведение 1234 · 6? Это же

$$\begin{aligned}(1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4) \cdot 6 = \\ = 4 \cdot 6 + 3 \cdot 6 \cdot 10 + 2 \cdot 6 \cdot 10^2 + 1 \cdot 6 \cdot 10^3 = \\ = 24 + 180 + 1200 + 6000 = 7404.\end{aligned}$$

Аналогично получаем, что

$$\begin{aligned}1234 \cdot 5 \cdot 10 = 6170 \cdot 10; \\ 1234 \cdot 4 \cdot 10^2 = 4936 \cdot 10^2; \\ 1234 \cdot 3 \cdot 10^3 = 3702 \cdot 10^3; \\ 1234 \cdot 2 \cdot 10^4 = 2468 \cdot 10^4.\end{aligned}$$

Поэтому

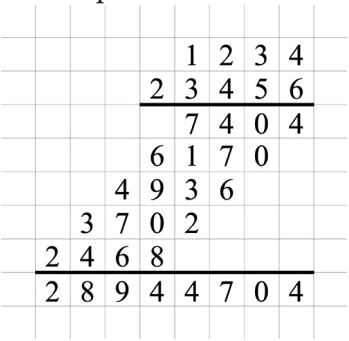
$$\begin{aligned}1234 \cdot 23\,456 = \\ = 7404 + 61\,700 + 493\,600 + 3\,702\,000 + 24\,680\,000.\end{aligned}$$

Чтобы было проще складывать эти числа, их записывают так, чтобы соответствующие разряды оказались друг под другом:

				1	2	3	4	
			2	3	4	5	6	
				7	4	0	4	
			6	1	7	0	0	
		4	9	3	6	0	0	
	3	7	0	2	0	0	0	
2	4	6	8	0	0	0	0	
2	8	9	4	4	7	0	4	

Однако нули в конце промежуточных чисел, получившиеся из-за степеней десятки, обычно не

пишут, а записывают результаты умножения цифр второго числа на первое число «лесенкой»:



Хотя это довольно часто приводит к ошибкам у школьников.

Вот так работает хорошо вам известный способ умножения в столбик. По сути, это многократно применённый распределительный закон умножения.

ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

Вот мы, наконец, и добрались до понятия делимости.

> Говорят, что целое число a *делится* на натуральное число b, если найдется такое целое число k, что $a = kb$. При этом говорят, что число b является *делителем* числа a, а число a *кратно* числу b.

Например, десять делится на пять, потому что $10 = 2 \cdot 5$. Но десять не делится на три, потому что